

Evaluación de una estrategia didáctica para la apropiación del concepto “derivada de una función”

Evaluation of a teaching strategy for the appropriation of the concept “derived function”

Avaliação de uma estratégia de ensino para a apropriação do termo "derivada de uma função"

Felipe Santoyo Telles

Universidad de Guadalajara, México

felipes@cusur.udg.mx

Miguel Ángel Rangel Romero

Universidad de Guadalajara, México

marangel@cusur.udg.mx

Eliseo Santoyo Teyes

Universidad de Guadalajara, México

esantoyo25@hotmail.com

Karla Liliana Puga Nathal

Universidad de Guadalajara, México

karlalpn4@hotmail.com

Resumen

La enseñanza tradicional del cálculo diferencial presenta grandes dificultades respecto a la apropiación significativa del concepto *derivada de una función*. Dado lo anterior, se construyó una propuesta didáctica considerando al conocimiento como una construcción personal a partir de los esquemas de cada sujeto y una negociación intersubjetiva de significados; asimismo, se considera al profesor como un promotor o mediador de la interacción entre los sujetos cognoscentes y el objeto cognoscible. Sobresalen los procesos de organización y adaptación con una estructura que atiende los principios del proceso de asimilación–acomodación de Piaget, y que provocan el cambio de estructura, desarrollo y

aprendizaje. Los contenidos de la propuesta se presentan contextualizados y organizados bajo una secuencia lógica en un cuadernillo de trabajo. Finalmente, la propuesta se experimentó y valoró mediante la prueba *t student* con resultados positivos.

Palabras clave: estrategias didácticas, aprendizaje significativo, derivada de una función.

Abstract

Traditional teaching of calculus presents great difficulties regarding the significant ownership of the term *derived function*. Given this, a didactic proposal was constructed considering knowledge as a personal construction from the diagrams of each subject and intersubjective negotiation of meaning was constructed and considers the teacher as a promoter or mediator of the interaction between cognitive subjects and knowable object. It highlights organizational processes and adaptation with assimilation-accommodation settings that cause the change in structure, development and learning (Piaget). The contents are contextualized and organized under a logical sequence in a *workbook*. The proposal was experienced and was evaluated by a “t student” test with positive results.

Key words: teaching strategies, meaningful learning, derived function.

Resumo

O ensino tradicional de cálculo diferencial apresenta grandes dificuldades quanto à apropriação significativa do derivado conceito de uma função. Face ao exposto, a proposta didática considerando o conhecimento como uma construção pessoal dos esquemas de cada sujeito e uma inter significados de negociação construídos; Além disso, é considerado o professor como um promotor ou mediador da interação entre os sujeitos cognitivos e objeto cognoscível. Projetam processos organizacionais e adaptação com uma estrutura que serve os princípios do processo de assimilação-acomodação de Piaget, e causar a mudança de estrutura, desenvolvimento e aprendizagem. O conteúdo da proposta são contextualizadas e organizada de acordo com uma sequência lógica de um livro. Finalmente, a proposta foi experimentado e apreciado pelo teste t de Student com resultados positivos.

Palavras-chave: estratégias de ensino, aprendizagem significativa, derivada de uma função.

Fecha recepción: Diciembre 2015**Fecha aceptación:** Julio 2016

Introdução

Falando sobre o ensino de matemática no México leva a uma estrada que tem sido difícil e complexo, imbuído de falhas e obstáculos pessoais e institucionais. Isto pode ser visto a partir das altas taxas de insucesso em relatórios de base, médio e superior, bem como do Programa de Avaliação Internacional de Estudantes (PISA), ou a Avaliação Nacional de Centros de desempenho acadêmico escola (LINK), entre outros.

Tais problemas no ensino da matemática tem sido documentada desde há várias décadas; programas professores núcleo comum de escolas tecnológicas (Ministério da Educação, 1988) apontou uma série de falhas no ensino da matemática em geral e mencionou que o ensino tradicional de cálculo diferencial apresenta grandes dificuldades quanto à propriedade significativa por alunos o conceito de derivada de uma função. sobre, Artigue (1995, p. 97) señala:

É evidente que o ensinamento dos princípios de cálculo é problemática. Numerosas investigações conduzidas show, com convergências surpreendentes, que, embora você pode ensinar os alunos a realizar mais ou menos mecanicamente alguns cálculos derivadas e primitivas e resolver alguns problemas padrão são muito difíceis de torná-los realidade no campo o cálculo e para fazê-los chegar a um entendimento satisfatório dos conceitos e métodos de pensamento que são o foco desta parte da matemática.

No mesmo sentido, Moreno (2005) reitera que o ensino do cálculo é bastante problemático. Apesar de sermos capazes de ensinar os alunos a realizar alguns derivados, tais ações estão longe de uma verdadeira compreensão dos conceitos e métodos de pensar desta parte da matemática. Avila (1998, p. 1) diz sobre o cálculo de ensino que "não foi possível conceber uma estratégia para garantir que os alunos adquiram o nível apropriado de domínio conceitual e metodológico para ter sucesso na resolução de problemas típicos de disciplina" .

Referindo-se ao ensino do cálculo diferencial, Sánchez Matamoros et al., (2008) mencionam múltipla pesquisa sobre ensino e aprendizagem de variational e cálculo diferencial e integral, observando que tais investigações juntamente com experiência como cálculo professores eles permitiram-lhes para verificar a dificuldade de ensinar e aprender esses conceitos. Por sua parte, Zúñiga (2007) menciona que esta situação foi abordada em vários trabalhos (Farfan, 1991 e 1994; ARTIGUE, 1995, Dolores, 1999;. E Salinas et al, 2002) mostrando argumentos teóricos e propostas para melhorar a qualidade da aprendizagem em cálculo de ensino.

A partir destes e de outros estudos, a Direcção-Geral de Tecnologia de Aprendizagem Industrial (DGETI), dirigiu em duas grandes reformas (2004 e 2008), que permearam para os níveis superiores em todo o país. No entanto, cinco anos depois da Reforma da Educação Escolar (RIEMSER 2008) mostra que tanto o CBTIS 226 (CBTis 226) e no Centro Universitário do Sul (CUSUR) Universidade de Guadalajara (Universidade de Guadalajara), os alunos não conseguem construir e possuir o conceito de derivada de uma função, e aplicar esse conhecimento para resolver vários problemas, entre outros, a otimização; Algumas vezes os estudantes algoritmos matemáticos abordar o desvio como um conjunto de regras muito complexas (por vezes sem sentido) que têm de memorizar e reproduzir para passar a unidade de aprendizagem correspondente.

Use as médias obtidas no teste de cálculo do departamento em CUSUR em dois semestres - define 2013A- 2012b e foram, respectivamente, 35 e 48 com uma taxa de insucesso de 56% e 64%.

Ele também observa que muitas vezes ambos os livros e professores, começar com a definição de um conceito para continuar com uma série de exemplos, mantendo os alunos como espectadores na repetição de uma série de algoritmos. Além deste, existem muitos professores de história em níveis médios e superiores cujos alunos não têm o fundo necessário para entender a derivada de uma função.

Neste trabalho, os resultados da implementação de uma estratégia de ensino baseado no construtivismo, que começou com o desenho de uma série de problemas de otimização e continuou com sua resolução pelos alunos são apresentados. Com sua compreensão e apropriação do conceito de uma função derivada através de situações problemáticas na área de interesse profissional dos estudantes são promovidos.

Para o endereço mencionado esta análise foi dividida em três partes: na primeira parte as bases teóricas que suportam a proposta educativa, na segunda parte do desenho metodológico que se seguiu aparece para contrastar as variáveis e para implementar presente o proposta de um grupo experimental de 45 alunos da escola técnica, e a terceira avaliação dos resultados e seu contraste com um grupo (controle) de alunos da mesma instituição onde a estratégia não funcionou é apresentado. Para fins práticos, a estratégia de ensino que foi projetado e implementado é apresentado na seção de anexos.

Objetivo Geral: Para determinar o efeito da estratégia de ensino concebido para aprender o conceito de derivada de uma função.

Hipótese: existem diferenças significativas na apropriação do derivado conceito de uma função, para implementar a estratégia de ensino concebido sobre a apropriação conseguida com a forma tradicional de cálculo ensino diferencial.

Revisão da literatura

O conhecimento é sempre um estado de transição de um processo; sei é assimilar e não copiar. Assimilar, de acordo com Glasersfeld (1997), significa, sobretudo, interpretar, dar sentido a uma nova experiência construída a partir de esquemas cognitivos do sujeito. Nesta seção, vamos apresentar alguns dos conceitos básicos relacionados com a construção do conhecimento a partir da aprendizagem significativa.

Os conteúdos em uma situação-problema

Um esquema cognitivo pode ser um conceito ou um padrão de ação; em esquema, há sempre um mecanismo de reconhecimento e alguma expectativa sobre os resultados esperados pela activação do sistema. Se os resultados são consistentes com os esperados, então o regime se torna mais estável e de confiança; No entanto, pode ser que perante uma nova situação um esquema de não responder adequadamente, então o esquema cognitiva é desequilibrada e não há a necessidade de responder à perturbação. Isto é conseguido através da modificação do sistema em causa, isto é, o alojamento, resultando em o sistema de re-equilibrção. Assim,

parece que a aprendizagem é a consolidação de esquemas cognitivos (padrões de ação, conceitos, teorias etc.) e a geração de novos desequilíbrios existentes, uma vez que estes são insuficientes para enfrentar novas tarefas .

Uma das variáveis que influenciam a aprendizagem, particularmente aqueles de conceitos matemáticos em caráter é a forma como eles são apresentados pelo professor no contexto de aprendizagem escolar, onde estes conceitos são estruturados e aplicada especificamente como parte projeto de ensinar a disciplina no conhecimento em sala de aula. Este processo Chevallard (1996) descreve-o como "transposição didática".

Por exemplo, durante o ensino de um conceito diferencial cálculo essencial como "derivado de uma função" podem ser entendidos pelos alunos apenas como uma "operação" se a actividade em sala de aula está focada na manipulação de símbolos através regras e fórmulas. Ensinar incidente desse tipo em uma construção fraca de significados dos conceitos.

De modo a compreender mais profundamente o conceito acima, os estudantes apropriando seu sentido como a taxa de variação instantânea ou inclinação de uma linha tangente à curva num dado ponto, o que também representa uma taxa instantânea de aumento ou diminuição fenômenos cuja variação segue um padrão determinado pela função.

Assim, para incentivar os alunos a tomar posse do derivado conceito de uma função, é reconhecido que deve promover a aprendizagem significativo de situações de resolução de problemas. Zuniga (2007) concorda com a ideia de que o estudo matemático de ambos os fenômenos do mundo real como matemática, coloque o aluno a situações problemáticas. sobre, Douady (1993, p 5) refere:

Um estudante tem conhecimento de matemática, se ele é capaz de trazer o seu funcionamento como ferramentas explícitas sobre os problemas a serem resolvidos, ou não indicadores para a formulação, e é capaz de se adaptar quando as condições usuais de emprego não são exatamente satisfeito, para interpretar problemas ou levantar questões em relação a eles.

Neste sentido, Buendia e Ordoñez (2009) base de ponto de construção significado a conceitos de cálculo e pré-cálculo a partir do desenvolvimento das próprias estratégias de pensamento e linguagem variational, particularmente para a apropriação significativa da derivada de uma função. A este respeito, eles mencionam que o estudo que varia, enquanto como nos fenômenos de mudança pode fornecer os significados derivados de gestão de distância fórmulas de derivação, algo que normalmente é limitado o seu ensinamento.

Enquanto isso, Cantoral e Farfán (1998) apontam gestão simultânea e coordenada dos derivados sucessivos como uma condição sem a qual a formação da ideia do derivado torna-se frágil; no entanto, este artigo aborda a relação entre duas grandezas que variam e estão relacionadas funcionalmente e onde a variação de uma depende da outra, pelo que Camarena (2000, p. 23) nomes matemática no contexto. Neste sentido, ele afirma:

Matemática em contexto ajuda os alunos a construir o seu próprio conhecimento de uma significativa matemática, com firme e amarrações não voláteis; Também reforça o desenvolvimento de habilidades matemáticas através do processo de resolução de problemas relacionados com os interesses do aluno.

Zúñiga (2007) Ele descreve as características de cada estágio no processamento de informações Feuerstein funções cognitivas que aparecem no ato mental de aprendizagem envolvidos na resolução de um problema. O autor identifica três fases na apropriação de um conceito a partir da resolução de uma situação-problema:

- *Entrada de fase.* Compreensão implica para o estudante compreender claramente tanto os dados oferecidos nas informações iniciais, tais como o estado final ou o objetivo que pretende alcançar. Para alcançar percepção clara é necessário para as funções cognitivas de exploração sistemática de uma situação de aprendizagem, decorrentes de forma eficiente.
- *Etapa de Processamento.* Ela envolve a busca de soluções alternativas que ligam o estado inicial, com o objetivo de alcançar (a resolução da situação-problema), mas é necessário antes que o sujeito é capaz de perceber e definir com precisão o problema, o que significa que a sua função percepção cognitiva e definição deste surge de forma eficiente. Este momento é a ligação entre a compreensão da situação problema e que é resolver adequadamente o problema.

- *Fase de saída.* A resposta deve ser emitido usando uma linguagem clara e precisa, dependendo do objectivo final do problema formulado, isto é, deve-se notar a comunicação explícita de uma tal resposta (pp. 153-154).

A necessidade de promover uma profunda reflexão sobre o conceito e não apenas como uma ferramenta tratamento instrumental também é reconhecida, permitindo que os alunos sejam capazes de aplicar esse conceito para resolver problemas de interesse. Com relação ao acima exposto, Godino e Recio (1998) sugerem que o significado é claro a partir das ações que o aluno é executado em objetos matemáticos, chamando-os de "práticas protótipos significativas".

Sabe-se também que, na maioria dos conceitos matemáticos podem estar envolvidos diferentes domínios ou quadros de representação: física, geométrica, numérica, gráfico (Douady, 1993); Além disso, para chegar a uma compreensão profunda e duradoura é aconselhável para promover a manipulação do objeto matemático a partir de diferentes quadros de representação.

Em epistemologia genética desenvolvidos por Piaget, de acordo com vários autores como Woolfolk (1996), Moreno (1998), Garcia (2006) e Serulnicov (2010), a aprendizagem ocorre a partir de dois princípios fundamentais: "assimilação e acomodação." A assimilação de um objecto ou uma situação implica uma interpretação, que é necessário para fazer admissível do objecto a ser processado pela estrutura cognitiva (alojamento), o resultado deste processo é uma forma de conhecimento que não é o resultado de " cópia "os dados externos (realidade) como presentes aos sentidos. O pressuposto fundamental é que os seres humanos construir, através da experiência, seu próprio conhecimento e não simplesmente receber a informação processada para compreender e utilizar imediatamente. O conhecimento é o resultado de uma construção contínua do mundo de nossas experiências.

Com o trabalho de Piaget tornou-se claro que o construtivismo permite o desenvolvimento da capacidade de fazer a aprendizagem significativa na criação de "situações de aprendizagem" que enfatizam a atividade aluno reflexivo. Apenas esta posição corresponde à estratégia proposta, criando situações de aprendizagem com uma intenção clara e precisa; ele está

recriando uma condição problema para os alunos a interagir com o objeto de conhecimento e na propriedade do processo tomada dele.

De acordo com as idéias expressas por Glasersfeld (1997, p. 2) ", ambos biólogos e físicos reconhecem que as estruturas conceituais que consideramos como conhecimento, são os produtos de conhecedores ativos que moldam o seu pensamento para se adequar às restrições que experimentam ". Então se trata de confrontar o aluno a uma situação-problema para promover passo a passo reconstrução de um conceito, que é realizada em um andaime anterior, por isso é necessário para garantir uma compreensão de alguns conceitos básicos e domínio de certos conhecimentos básicos que permitam aos estudantes através da construção do derivado conceito de uma função.

Estratégia de ensino

De acordo com Piaget et ai. (1977), a declaração do problema e da sua estrutura específica permite conflitos cognitivos gerado o aluno tentar resolver os regimes tem, então, assimilar; ou seja, tentar resolver o problema com o conhecimento e os recursos que tem, e, se necessário, o seu esquema cognitivo será modificado para acomodar a situação que ele enfrentou. As ações promovidas (passos para resolver o problema) tem o assunto em duas direções: para reafirmar algo que você já sabe ou reestruturar seus sistemas e dar sentido a uma nova experiência, de modo que o conhecimento é tanto demorado, resultado, o ponto de partida e de processo.

Em outras palavras, no esquema são sempre apresentar um mecanismo de reconhecimento e uma certa expectativa sobre os resultados esperados pela ativação do sistema. Se os resultados (após ação sobre o problema) são compatíveis com o esperado, então o esquema se torna mais estável, mas pode acontecer que enfrentar uma nova situação (problema ou parte do problema) um esquema não responde corretamente, então esquema cognitivo é desequilibrado (isto é precisamente a proposta, desequilibrando o sistema a partir de uma situação-problema que deve ser resolvido), e surge a necessidade de responder (resolver) para o distúrbio. Isto é conseguido através da modificação do regime em questão, esta é a acomodação.

experiência cognitiva de seres humanos não está confinado à sua interação com as coisas materiais, mas inclui os resultados da interação com outras pessoas em seu ambiente social. No processo de problemas de otimização resolver propõe-se que os alunos formam equipes de três elementos e desenvolver um trabalho colaborativo, já que de acordo com Moreno (1998, p. 169), "a interação com os outros -especialmente quando formas de agir e os meios disponíveis para tal ação foi insuficiente listada como uma das principais fontes de desequilíbrio cognitivo e, portanto, a aprendizagem".

Metodologia

Nós trabalhamos com uma metodologia processual com base na otimização de resolução de problemas como atividade principal. Além disso, o cuidado especial que situações problemáticas terá uma estrutura lógica, estabelecendo ligações entre as estruturas de conhecimento prévios e comprar um novo conteúdo a ser tido. A disposição dos alunos para aprender é importante, para que os problemas estão relacionados com a sua realidade imediata, considerando que se encontram significado e aplicação prática será, então, mais atraente.

Tipo de pesquisa. Quantitativa de corte transversal através da aplicação de um teste.

Instruments. O teste consiste em oito questões abertas que exigem que os alunos manifestar compreensão dos conceitos necessários para a construção do conceito de derivado de uma função. Uma vez que as respostas foram obtidos, foram avaliados por contraste com os significados institucionalizados em vários livros de texto, e o resultado do teste foi avaliado a partir de zero a 100 pontos. Por outro lado, foi determinado por análise estatística ao nível de significância entre os resultados obtidos por trabalhar com dois grupos, experimental "A" e um grupo de controlo "B".

Universo. O universo era constituído da população escolar participaram do quarto semestre CBTIS de Ciudad Guzman, Jalisco, México (CBTis No. 226).

Mostra. Eles foram divididos aleatoriamente em dois grupos, que foram determinadas pelo chefe do departamento de serviços educacionais da instituição. O experimento foi realizado durante os meses de Fevereiro, Março, Abril e Maio, e dois grupos focais foram tratados com

diferentes especialidades; o grupo de trabalho com a metodologia proposta foi chamado experimental "A" (44 alunos) e que trabalhou com a metodologia tradicional foi chamado controle "B" (46 alunos). No grupo experimental aleatoriamente equipes foram formadas, os alunos de cada equipe permanecem nele durante o curso do experimento para conseguir a integração e facilitar a negociação de novos significados.

A análise estatística (aplicação da proposta)

Os resultados deste estudo foram analisados usando SPSS versão 15 (Chicago, IL, EUA). Para corroborar a existência de diferenças estatísticas teste t de Student foi utilizado em um nível de significância de $p \leq 0,05$.

Resultados

As médias obtidas como resultado da aplicação de um teste feito com a intenção de que o aluno expressa a compreensão dos conceitos necessários para a construção do conceito de derivado de uma função foram comparados. O grupo trabalhou com a metodologia experimental obteve uma média de $60,29 \pm$ erro padrão de 3,8 pontos, enquanto que o grupo que trabalhou com a metodologia tradicional (controle) a média foi de 24,12 com um erro típico de 3,41. Os resultados são mostrados na tabela a seguir.

Grupo	N	Media	Desviación típica	Error típico de la media
Control	39	24.1282	21.3112	3.41252
Experimental	44	60.2955	25.40608	3.83011

Tabla 1. Valores descriptivos

Diferenças estatisticamente significativas nas médias obtidas entre o grupo controle eo grupo experimental ($p = 0,000$) foram encontrados. A diferença entre as médias amostrais (ver figura abaixo), não é o resultado de um erro de amostragem. Pode-se dizer que, nas condições em que foi realizado o estudo, a metodologia foi crucial para os alunos a se apropriar do conceito de derivada de uma função.

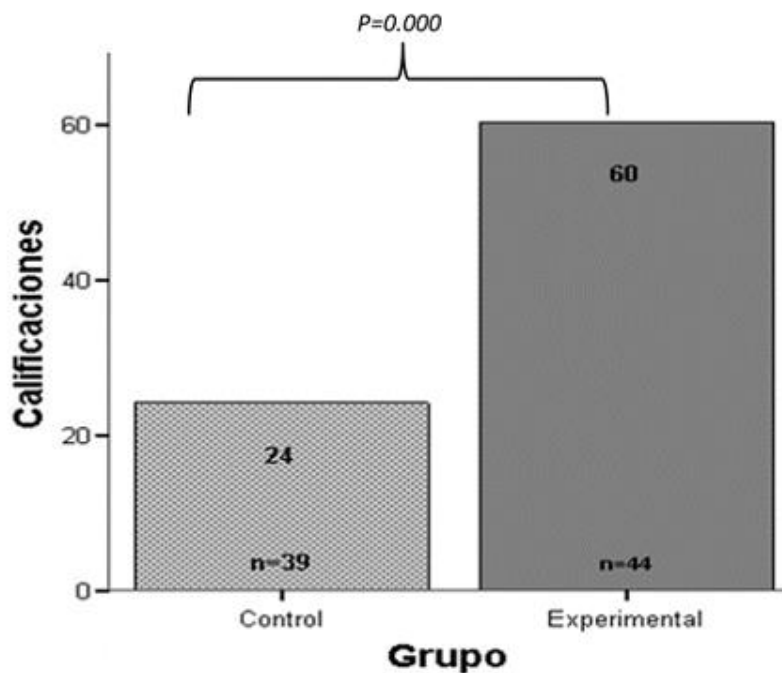


Figura 1. Significancia estadística (elaboración propia).

Resposta global ao problema

A partir dos resultados obtidos nesta investigação pode-se dizer que o uso da metodologia proposta no grupo experimental, os alunos do quarto semestre de bacharelado tecnológico adequado o conceito de derivada de uma função e desenvolver as competências necessárias para a resolução de problemas otimização envolvendo cálculo diferencial.

Discussão

Ele foi encontrado provas suficientes para dizer que através da estratégia de ensino que foi usado nos alunos do grupo experimental:

- Eles apropriar os elementos necessários que lhes permitam desenvolver e interpretar os registros que representam várias funções.
- Reconstruir um processo através do qual eles podem desenvolver e internalizar o conceito de derivativo e apropriar-se dela, e compreender e aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas de otimização.
- Desenvolver estratégias de trabalho em equipe e liderança.

De acordo com as observações e registros feitos, pode-se dizer que a estratégia de ensino baseada na resolução de problemas de otimização é uma opção importante para incentivar os alunos a alcançar a aprendizagem significativa da derivada de uma função, e simultaneamente promove processo de internalização da ordenada e sistemática (organização e estrutura) que aumentam a atividade dos alunos, a sua motivação intrínseca e sobre a aquisição duradoura de habilidades e atitudes que prevalecem no contínuo da sua preparação acadêmica e profissional pensava.

Para complementar os dados relatados, antecipamos que os alunos mostraram habilidades, tais como tomar notas, salvamento importante, relacionar conceitos, tempo de organizar, descrever verbalmente o que você faz, compreender antes de resolver, desenho, usando problemas de modelo, alterando quadros representação, explorar o problema, ser flexível no processo, aprender com o erro, colocados em contexto, identificar, esboço, descobrir relações, os quais, embora não desenvolvido a partir do trabalho com a estratégia de ensino, sim convida inquérito detalhado.

Noções básicas de contraste com os principais resultados do trabalho

- Quando as situações matematize da vida cotidiana como um processo para a realidade de trabalho através de idéias e conceitos matemáticos, esse trabalho foi realizado em duas direções opostas: a partir dos esquemas de contexto criado formulado e visualizados os problemas, as relações e regularidades foram descobertos, semelhanças com outros problemas foram encontrados. E trabalhando matematicamente eles encontraram soluções e propostas que foram projetadas em realidade para analisar o seu valor e significado.
- A estrutura dos problemas resolvidos favorece os alunos percorrer as etapas, que vão desde a leitura da declaração para a formulação da resposta, incluindo a concepção e implementação de um plano que provou ser guiar a atividade sugerida. Neste contexto, a interação de aritmética, estruturas geométricas e algébricas favorecida.
- Aprendizagem significativa foram alcançados, como estudantes estabeleceu ligações entre residentes conhecimento prévio na estrutura cognitiva e novo conteúdo incorporado em uma forma ordenada os problemas resolvidos.
- Aprendizagem indutivamente foram propostos e o professor se manteve uma atitude de orientação orientada permitindo que o simples à descoberta complexa.

- A estratégia proposta autorizados a manter uma estreita relação entre a aprendizagem e desenvolvimento cognitivo; estudantes, interagindo com a realidade, os conflitos cognitivos gerado que favoreceu o processo de auto-estruturação.
- Quando a resolução de problemas em equipe, a dimensão social da aprendizagem, que é uma inter significados de negociação que são construídos sobre a interação dos alunos com os seus pares eo professor foi considerado. O último é, essencialmente, manifesta-se como promotor da interacção entre os sujeitos cognitivos e objectos reconhecíveis.

Conclusão

A análise quantitativa mostrou respostas positivas quanto à apropriação do conceito de derivada de uma função. No entanto, é importante notar que existem múltiplas relações e explorar aspectos da abordagem qualitativa; por exemplo, os valores internalizados pelos alunos, o grau de importância dos conceitos, habilidades de liderança, entre outros. Além disso, sabe-se que o conhecimento é sempre parcial, temporária e perfectíveis, um processo contínuo em fase de construção, e também que cada grupo e cada aluno é diferente. A partir dessas premissas podem ser mencionadas as seguintes limitações:

- A resistência à mudança por parte de alguns estudantes que preferem o professor para explicar-lhes, enquanto eles apenas tomar notas e seguir as instruções.
- Dificuldade para desenvolver trabalho em equipe.
- O trabalho proposto realizada num dado contexto, mas não é certo que funciona da mesma forma em outros contextos.
- Em alguns casos, a generalização do processo indutivo não é dada na íntegra, para que alguns alunos não atingem ver além da situação particular tratada.
- Para alguns estudantes os problemas não eram de seu interesse pessoal ou profissional.
- Suspensões oficial e não-oficial da classe (fora programada no início de cada semestre) alterou negativamente o planejamento do curso.
- O atraso ou ausência de alguns alunos, afetando o processo de desenvolvimento planejado.

Os cenários propostos estão focados em problemas da área, situações semelhantes no entanto, eles podem ser projetados econômico-administrativos para utilizar esta metodologia em quase qualquer outra área, por exemplo, em programas da área médico-biológica ou nas áreas de engenharia, mecânica, física e assim por diante. Em geral, os alunos do grupo experimental conseguiram uma maior compreensão dos conceitos, desenvolver melhores procedimentos e uma melhoria considerável na sua atitude em relação a hábitos de estudo e de trabalho, que podem ser estudadas melhor a partir da abordagem qualitativa.

Bibliografía

- Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de educación* 43, pp. 85-101.
- Artigue M., Douady R., Moreno L. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*, México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 97-140.
- Ausubel, D. y Novak, J. (1990), *Psicología educativa*. México: Trillas.
- Ávila, G. R. (1998). *La enseñanza del cálculo*, Disertación doctoral no publicada, Universidad de Sonora: México.
- Buendía, G., y Ordóñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 12(1), 7-28.
- Camarena, P. (2000). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación educativa*, 9 (46), 15-25, Instituto Politécnico Nacional. México. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894003.pdf>
- Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Épsilon* 42 (3), 854-856.
- Cantoral, U. R. (2012, noviembre). Conferencia plenaria ¿Qué es la matemática educativa? Dictada el jueves 1 de noviembre de 2012 durante el XLV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Querétaro, México.

- Covarrubias, F. (1992). El proceso educativo: un problema epistemológico de construcción de conocimiento. VII Encuentro Nacional de Investigación Educativa. Instituto Michoacano de Ciencias de la Educación. Morelia, México.
- Chevallard, Y. (1996). *La transposición didáctica*. Barcelona: Aique.
- Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Douady, R. (1993). Juegos de marcos y dialéctica herramienta-objeto, *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas* (escuela francesa). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, D.F.
- Farfán, R. M. (1991). El curso de precálculo: un enfoque gráfico. *Publicaciones Latinoamericanas en Matemática Educativa*. 5(1), 206-211.
- Farfán, R. M. (1994). Ingeniería Didáctica en precálculo. Acerca de la puesta en escena de los resultados de investigación en el sistema de enseñanza. *Publicaciones Latinoamericanas en Matemática Educativa*. 8(1), 457-462.
- García, G. (2006) (reimp. 2010). *Piaget, la formación de la inteligencia*. Biblioteca Grandes Educadores. Ed. Trillas, México.
- Glaserfeld, V. (1997). *Homage to Jean Piaget (1896-1980)*. Home: Ecology of mind. Recuperado de: <http://www.oikos.org/Piagethom.htm>
- Godino, J., Recio, A. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática en Olivier, A. y Newstead, K. (eds.). Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 3, University of Stellenbosch, South Africa, 1-8.
- Moreno, A. (1998). La enseñanza de la matemática: un enfoque constructivista. *Piaget en la educación. Debate en torno a sus aportaciones*. Paidós Educador, 1ª reimpresión, México, 2007, pp. 165-193.
- Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo. Evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (eds.), IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Córdoba, España: Universidad de Córdoba, pp. 81-96.
- Piaget, J. (1971). *Science of education and the psychology of the child*. New York: Viking Press (*Psychologie et pédagogie*, 1969).

- Piaget, J. (1977). Prólogo. En J.C. Bringuier, *Conversaciones libres avec Jean Piaget*, París: Editions Laffont.
- Piaget, J., Inhelder, B., García, R., y Vonèche, J. (comps.) (1977). *Epistémologie génétique et équilibration*, Neuchatel-Paris-Montréal, Delachaux & Niestlé.
- Salinas, P., Alanís, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., y Garza, J. L. (2002). *Elementos del cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza*. México: Trillas.
- Sánchez–Matamoros, G., García M., Llinares S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2), 267-296.
- SEP, SEIT, COSNET (1988). Programas maestros del tronco común del bachillerato tecnológico, volumen I, segunda parte: matemáticas.
- SEP, SEIT (1996). Propuestas para la reforma académica del bachillerato tecnológico. Diagnóstico académico del bachillerato tecnológico, México D. F., marzo de 1996, pp. 21-25.
- Serulnicov, A. y Suárez, R. (2010). *Jean Piaget para principiantes*. Era Naciente SRL. Buenos Aires, Argentina.
- Woolfolk, A. (1996). *Psicología educativa*. Sexta edición. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Zúñiga, L. (2004). Funciones cognitivas: un análisis cualitativo sobre el aprendizaje del cálculo en el contexto de la ingeniería. Tesis de doctorado, Cicata-IPN, México.
- Zúñiga L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10 (1), 145-175. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500107>> ISSN 1665-2436

Anexo

Por cuestiones de espacio se describe solo uno de los cinco problemas elaborados en la propuesta.

Problema

El responsable de la cafetería del plantel estima un costo de elaboración por cada desayuno que prepara en \$10.⁰⁰, también estima sus costos fijos por conceptos de renta, energía eléctrica, impuestos, empleados, etcétera, en \$300.⁰⁰ diarios. El encargado de la caja ha observado que vendiendo cada desayuno en \$16.⁰⁰ la demanda es de 140 desayunos, pero cuando el precio sube hasta \$22.⁰⁰ la demanda baja a 80 desayunos.

¿Cuánto será la mayor ganancia posible a lograr?, ¿cuál será el mejor precio de venta, de tal manera que le permita obtener las mayores ganancias?, ¿cuántos desayunos venderá a ese precio? y ¿a partir de un detallado análisis qué recomendaciones o comentarios se podrían hacer?

Primera parte

1.- Lee cuidadosamente y comprende el problema. Separa los valores conocidos y determina cuál es la incógnita, ¡escríbela!

2.- Necesitamos un plan para resolver este problema. Construiremos la función de utilidades, (en su expresión algebraica). Relaciona “x” tortas vendidas con “U” utilidades, esta es la parte principal del plan que nos permitirá saber cuándo obtendremos mayores utilidades. Te guiaremos en este camino.

3.- A partir de la información dada establece la función de costos por día (a cuánto ascienden sus gastos o costos por día) y gráficala. $C = m x + b$. Donde “m” es el costo de elaborar cada desayuno y “b” es el costo fijo.

4.- Con la información dada establece la expresión algebraica (función) que relacione precio “p” y ventas “x” y traza la gráfica correspondiente. Nota: considera en esta ocasión que por conveniencia el precio depende del número de desayunos vendidos. Puedes plantear la expresión del siguiente modo: $P - P_1 = m (x - x_1)$ en donde $m = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1}$ “P” estará en función

de “x”.

5.- Con las dos ecuaciones anteriores establece la función de utilidades considerando que las utilidades son ingresos menos costos. $U = I - C$ (Ingresos = No. de desayunos “x” por “P”

precio de cada desayuno). $U = I - C = xP - C$. Atención, “P” precio lo tomas de la segunda función paso 4 y “C” costo de la primera función paso 3.

Desarrollando el plan

6.- Traza la gráfica correspondiente de la función de utilidades, ubicando en el eje de las abscisas la variable “x” y en el eje de las ordenadas la variable “U”. Observa que “U” es función de “x”, o sea U depende de x, dicho de otro modo $U=f(x)$.

7.- En el punto (20, 60), ¿la curva de $U= f(x)$ está creciendo o decreciendo?

8.- En el punto (110, 690), ¿la curva $f(x)$ está creciendo o decreciendo?

9.- Traza una recta tangente a la curva de $f(x)$ con la condición de que la pendiente de esta recta tangente sea cero.

10.- Escribe cual es el punto en la curva en el que tendrás máximas utilidades. Para hallar este punto, ¿qué tuviste que hacer?

11.- Traza una recta tangente a la curva por un punto cualquiera. ¿Puedes determinar qué dirección tiene la curva en ese punto?, ¿conoces algún método para determinar esta dirección?

12.- ¿Para qué crees que te sirve en este caso conocer la dirección de la curva en un punto en particular?

13.- ¿Qué importancia podría tener conocer la pendiente de la curva en algún punto en particular?

14.- Toma el punto $(x_1=20, U_1=60)$ de la función de utilidades $y = f(x)$, luego asigna un incremento a “x” (“ Δx ”) de una unidad $x_2 = x_1 + \Delta x = 21$ y calcula el respectivo valor de $U_2 = f(x_1 + \Delta x)$. Observa que también $U_2 = U_1 + \Delta U$. Observa que en este punto al aumentar x, también aumenta U.

15.- Como obtendrás dos puntos (x_1, u_1) y (x_2, u_2) traza una “recta secante” que pase por esos dos puntos y calcula su pendiente $m = \frac{U_2 - U_1}{x_2 - x_1}$

16.- Manteniendo fijo el punto (x_1, y_1) ahora incrementa a “x” “ Δx ”, de tal modo que el incremento sea más pequeño que el anterior. Por ejemplo, $\Delta x = \frac{1}{2}$ calcula nuevamente el respectivo valor de U_2 , calcula también ΔU y la pendiente de la recta secante que pasa por estos dos puntos (x_1, U_1) y el nuevo (x_2, U_2) .

17.- Repite el paso anterior algunas veces más, ayúdate con la siguiente tabla. Utiliza la función de utilidad que determinaste en el paso número 5.

x_1	x_2 $(x_1+\Delta x)$	$\Delta x = x_2 - x_1$	U_1	U_2	$\Delta U = U_2 - U_1$	$m = \Delta U / \Delta x$
20	21	1	60	75.9	15.9	15.9
20	20.5	$\frac{1}{2} = 0.5$	60			
20	20.2	$\frac{1}{5} = 0.2$	60			
20	20.1	$\frac{1}{10} = 0.1$	60			
20	20.01	$\frac{1}{100} = 0.01$	60			

18.- A partir de la tabla anterior se promueve que el alumno vaya haciendo los incrementos de la variable independiente cada vez más pequeños, hasta tender a cero. Al final se le pregunta que si de modo intuitivo podemos concluir que cuando el incremento “ Δx ” **tiende** a ser cero, ¿qué valor tendrá la pendiente $m = \Delta u / \Delta x$? Si el alumno realizó la serie de pasos adecuadamente, ¡¡Felicidades, ha calculado de modo intuitivo aritmético y puntual la (derivada) pendiente de la recta tangente a la curva de la función de utilidades en el punto (20, 60)!!

Segunda parte. Generalizando: la derivada en un plano algebraico

1.- Considera fijo el punto (25, 137.5) y completa la siguiente tabla igual que la anterior. Observa que:

- $f(x_1)$ corresponderá a U_1 , por lo tanto $f(x_1 + \Delta x)$ corresponderá a U_2
- $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ es igual a ΔU , por lo tanto $\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ es igual a $m = \Delta u / \Delta x$
- Recuerda que nuestra función objetivo es $U = -\frac{x^2}{10} + 20x - 300$

x_1	$x_2 =$ $(x_1+\Delta x)$	Δx	$f(x_1) =$ U_1	$f(x_1+\Delta x) =$ U_2	$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$	$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ $= m = \frac{\Delta U}{\Delta x}$
25	26	1	137.5	152.4	14.9	14.9
25	25.5	$\frac{1}{2} = 0.5$				
25	25.2	$\frac{1}{5} = 0.2$				

25	25.1	$\frac{1}{10} = 0.1$				
25	25.01	$\frac{1}{100} = 0.01$				

2.- Dado que $m = \frac{\Delta u}{\Delta x}$ escribe el valor que tendrá la pendiente en el punto (25, 137.5) cuando el Δx tienda a cero.

¡¡Felicidades, ahora has calculado de modo aritmético la pendiente de la recta tangente a la curva de la función de utilidades en el punto (25, 137.5)!!

3.- Las pendientes en el punto (20, 60) y (25, 137.5), ¿fueron iguales o desiguales?, ¿qué significa esto?

Después reflexiona sobre el siguiente concepto:

Atención: la derivada de una función es la tangente del ángulo de inclinación de la curva en un punto, es decir, es la pendiente de la recta tangente en ese punto; esto nos permite saber la dirección de la curva en tal punto. Geoméricamente la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto dado.

Proceso algebraico para encontrar la pendiente de una recta tangente a la curva en cualquier punto

A continuación encontraremos la derivada “algebraicamente” de nuestra función de utilidades

en estudio. $U_1 = -\frac{x^2}{10} + 20x - 300$ Observa que: $f(x)$ es U_1

$f(x + \Delta x)$ corresponde a $U_2 = -0.1(x + \Delta x)^2 + 20(x + \Delta x) - 300$

- $f(x + \Delta x) - f(x)$ es igual a $U_2 - U_1 = \Delta U$ (se deja al alumno realizar la resta)
- $\Delta U = -0.2x\Delta x - 0.1\Delta x^2 + 20\Delta x$ si se divide esta expresión entre el incremento de la

variable independiente Δx , entonces $\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = -0.2x - 0.1\Delta x + 20$

- Si el Δx tiende a cero, entonces $\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = m = -0.2x + 20$

La función obtenida $g(x) = -0.2x + 20 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = m$ es la función derivada de la función

$U = -0.1x^2 + 20x - 300$ se le representa por $U' = -0.2x + 20$

“esta función derivada” $U' = -0.2x + 20$ permite hallar el valor de la pendiente de toda recta tangente que se puede trazar en cualquier punto de la curva de utilidades, y conocer la dirección de tal curva. Si crece o decrece, tiene un valor máximo o uno mínimo.

Parte tres. Gráfica de la derivada (plano geométrico)

En esta sección se promueve que los alumnos logren una representación gráfica de la función y de la derivada de esta en un mismo plano y luego hagan el análisis correspondiente con algunas acciones como las siguientes:

- 1.- En el mismo plano que trazaste la gráfica de la función de utilidades, $U = -0.1x^2 + 20x - 300$, traza la gráfica de la función derivada $U' = -0.2x + 20$
- 2.- Compara las dos gráficas y responde a las siguientes preguntas:
 - ¿Qué pasa en la gráfica de utilidades U cuándo la gráfica derivada U' es positiva?
 - ¿Qué pasa cuando la derivada U' es negativa?
 - ¿Qué pasa en la gráfica de utilidades cuando la gráfica derivada U' se hace cero?
 - ¿Qué importancia tendrá el conocer el punto exacto donde la derivada se hace cero y cómo se podrá saber esto último?
 - ¿Cómo interpretas tú personalmente la derivada?, ¿cómo lo expresarías con tus palabras?
 - ¿Qué otras aplicaciones se te ocurren para la derivada?