

## El método del aprendizaje basado en problemas como una herramienta para la enseñanza de las matemáticas

*The method of problem-based learning as a tool for teaching mathematics*

**Víctor Castaño**

Universidad Autónoma de México, México  
[meneses@servidor.unam.mx](mailto:meneses@servidor.unam.mx)

**Mario Montante**

Instituto Tecnológico de Querétaro, México  
[meneses@unam.mx](mailto:meneses@unam.mx)

### Resumen

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) es una de las metodologías educativas que han tenido buena aceptación en instituciones universitarias en México. Es un proceso activo de aprendizaje que funciona mediante la solución de problemas relacionados con la interacción de los estudiantes y su entorno profesional. La esencia del ABP consiste en identificar, describir, analizar y resolver tales problemas, lo cual se logra con ayuda del docente, desempeñando así otro papel tanto el proceso de enseñanza-aprendizaje como los estudiantes.

Una forma en la que se ha incorporado recientemente esta metodología en el salón de clases de las carreras de ingeniería ha sido mediante trabajos teóricos que los estudiantes discuten. Por ejemplo, discuten los resultados de un artículo científico reciente en particular, del cual deben analizar los planteamientos presentados y que están relacionados con sus cursos de matemáticas impartidos en la institución. Los objetivos principales son implementar el ABP en los cursos del área de matemáticas como parte de las metodologías que los docentes tienen a su alcance e involucrar a los estudiantes en investigaciones de ciencia e ingeniería de materiales; la meta principal es que los estudiantes presenten sus resultados tanto en foros estudiantiles como en congresos nacionales, como producto de la aplicación del ABP en el salón de clases.

**Palabras clave:** Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), ciencia e ingeniería de materiales.

### Abstract

Problem Based Learning (PBL) is one of the educational methodologies that have been well accepted in universities in Mexico. It is an active learning process that works by solving problems related to the interaction of students and their professional environment. The essence of PBL is to identify, describe, analyze and solve such problems, which is achieved with the help of teachers and other role playing both the teaching-learning process as students.

One way that has recently joined this methodology in the classroom engineering careers has been theoretical work by students discuss. For example, discuss the results of a recent scientific article in particular which should analyze the proposals submitted and that are related to their math courses taught in the institution. The main objectives are to implement PBL in the area of mathematics courses as part of the methodologies that teachers have to reach and engage students in science and engineering research materials; the main goal is for students to present their findings both in student forums and national conferences, as a result of the application of PBL in the classroom.

**Key words:** Problem Based Learning (PBL), materials science and engineering.

**Fecha Recepción:** Diciembre 2014 **Fecha Aceptación:** Mayo 2015

---

### Introducción

Los objetivos del presente trabajo son: a) que el estudiante aprenda a resolver problemas de ingeniería mediante la búsqueda sistemática de información y el razonamiento científico, desarrollando temas no contenidos en los programas de los cursos de matemáticas, utilizando para esto el método del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), y b) que el docente se convierta en un transmisor de conocimientos nuevos, como lo son los resultados de

investigaciones recientes, para motivar al estudiante con temas de ingeniería actuales pero sin dejar de lado la teoría desde la que fueron desarrollados.

El ABP es un proceso activo de aprendizaje que funciona a través de la solución de problemas relacionados con la interacción del hombre y su medio ambiente. La esencia del ABP consiste en identificar, describir, analizar y resolver tales problemas, lo cual se logra mediante la interacción del docente y los estudiantes.

Las metas a lograr por el ABP son que el estudiante:

1. Se haga responsable de su autoaprendizaje; diagnostique lo que necesita saber acerca de un determinado problema.
2. Favorezca el razonamiento científico desde la formulación de hipótesis hasta la búsqueda sistemática de la solución a problemas específicos.
3. Trabaje armónicamente con sus compañeros mediante una buena comunicación, tenga disponibilidad de ayudar a sus compañeros, desarrolle diferentes roles, escuche y tenga confianza de aportar su mejor esfuerzo, es decir, que realice un constructo grupal.
4. Conozca el avance del programa en curso, el proceso de aprendizaje de la resolución de problemas, así como la adquisición de conocimientos; sea capaz de auto-evaluarse.

Este es, pues, un intento por establecer en la institución el espíritu de *aprender a aprender*, el cual se ha establecido en otras instancias, como la Comunidad Europea. <sup>(1)</sup> Una vez establecida esta práctica, el siguiente paso es implementar los fundamentos pedagógicos en la formación de los estudiantes: aprender a ser, aprender a hacer, aprender a conocer y aprender a vivir en colectivo. De este modo se logrará que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para las competencias básicas de su profesión. <sup>(2)</sup>

Se pone especial énfasis en la relación docente-estudiante, la cual se busca sea intensamente interpersonal para que los estudiantes aprendan del docente. <sup>(3)</sup>

En la práctica, el estudiante debe aprender los temas de sus cursos mediante proyectos de investigación fundamentados en disciplinas del conocimiento relacionadas con su profesión.

Se busca que los estudiantes autoevalúen su aprendizaje, sustentándose en una postura autodidacta, la búsqueda efectiva de información y el trabajo cooperativo dentro de un equipo, entre otros tantos aspectos que ayudan a satisfacer las demandas de la sociedad. <sup>(4)</sup>

## **EL CURSO**

La metodología del ABP se implementó en un curso intermedio de la currícula, para que el estudiante posea la base teórica necesaria al desarrollar los temas del curso tras haber aprobado sus cursos elementales, y a la vez inicie sus cursos de especialización habiendo asimilado esta nueva metodología. Se seleccionó el curso de Ecuaciones Diferenciales por tratarse de una materia que le exige emplear los conocimientos previos de sus cursos de Cálculo Diferencial e Integral y Álgebra lineal, que a la vez le serán de utilidad en otros cursos del área de ingeniería, como son Circuitos Eléctricos, Electricidad y Magnetismo, entre otros.

Un curso típico de Ecuaciones Diferenciales cubre, entre otros, los temas mostrados a continuación:

- Ecuaciones diferenciales de primer orden
- Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden
- Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior
- Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden

De entre estos temas, se eligió el de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden por ser de gran interés en el área de las ingenierías. Y como subtema en la metodología del ABP se seleccionó polímeros, específicamente polielectrolitos, a través de un artículo científico reciente, del cual el docente es co-autor. <sup>(5)</sup>

Se plantearon al grupo las siguientes metas con relación a los objetivos de los textos universitarios de ecuaciones diferenciales, ya que para los estudiantes representa dar un paso más allá:

- Resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden donde se involucran derivadas parciales.
- Resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden en diferentes sistemas de coordenadas.

Por su parte, el docente establece tres propósitos en su evaluación educativa:

- Demostración de dominio o competencia en determinada área.
- Discusión al maestro y/o academia, sobre áreas de mejora del proceso enseñanza-aprendizaje.
- Discusión con los estudiantes sobre el nivel de competencia logrado.

Para demostración de dominio o competencia en un área determinada, los estudiantes debieron ser capaces de establecer en qué consiste el método de separación de variables, poder expresar el operador Laplaciano tanto en coordenadas cilíndricas como en coordenadas esféricas y, finalmente, resolver la Ecuación de Poisson-Boltzmann para Zwitteriones en coordenadas esféricas y cilíndricas.

Para la discusión al maestro y/o a la academia sobre áreas donde pueden mejorar el proceso, los estudiantes plantearon la actualización de los planes de estudio así como de los docentes que imparten los cursos elementales de matemáticas, se realizó una discusión, a inicio de semestre, de los temas contemplados en el plan de estudios y se elaboraron proyectos extra-clase con aplicaciones reales y actuales de los temas contemplados en el plan de estudios. Los

estudiantes expresaron su inquietud sobre la necesidad de que las instituciones de educación superior tengan investigadores del área de ciencias impartiendo parte de los cursos elementales de su carrera.

En la discusión con los estudiantes sobre el nivel de competencia logrado, se planteó la meta de presentar los trabajos desarrollados en encuentros estudiantiles y/o foros a nivel nacional.

Al no ser la evaluación del desempeño y conocimientos del estudiante una responsabilidad exclusiva del docente, los compañeros de estudio y el propio estudiante se convierten en evaluadores y pueden producir información única que valide y complemente las observaciones del docente. Así, las áreas de evaluación son el contenido, los procesos y el producto alcanzado.

El contenido es evaluado de acuerdo a la información y a los conocimientos adquiridos por los estudiantes, utiliza exámenes “objetivos” de falso-verdadero, opción múltiple o de respuesta breve y están centrados en el docente. Es decir, este determina contenidos, profundidad y nivel de comprensión. Los temas trabajados son las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), de segundo orden, aplicaciones industriales de las EDO de segundo orden y las EDO parciales.

El proceso es evaluado a partir de los métodos y técnicas desarrollados por los estudiantes, a quienes se pide un producto concreto e intelectual. Este tipo de evaluación se centra en la habilidad del estudiante, como aprendiz, para estructurar un esquema que solucione un problema, para usar información en la solución de problemas y para evaluar la información o datos recabados. Todo esto se hace mediante la exposición de los temas ante el grupo.

El producto de cualquier actividad puede utilizarse para evaluar cualquier tipo de objetivos de aprendizaje. Particularmente se eligió la presentación de los resultados obtenidos en foros estudiantiles.

**LA TAREA**

A partir del artículo científico seleccionado se plantean a los estudiantes dos tareas a discutir, por un lado está la deducción de la ecuación de Poisson-Boltzmann linealizada, para el caso especial de zwitteriones (PBLZ), y por el otro está la solución de dicha ecuación en el sistema de coordenadas cilíndricas. La meta es analizar el parámetro de apantallamiento de un sistema polimérico. <sup>(6)</sup>

La diferencia principal entre las dos tareas es que mientras la primera tarea se enfoca más en un entendimiento conceptual, la segunda tarea requiere un desarrollo matemático que no va más allá de métodos matemáticos. Se forman dos equipos de trabajo y discuten, sin la intervención del docente, la asignación de las tareas a cada equipo.

Ambos equipos inician conjuntamente su tarea respectiva mediante una búsqueda bibliográfica de algunos eventos importantes para el desarrollo de las teorías relacionadas con el tema de polielectrolitos, los cuales ya habían sido especificados por el docente. Ver tabla 1.

<b>Personaje</b>	<b>Evento</b>
W. Kossel	Interacción electrostática entre centros de carga aniónicos y catiónicos
E. Fisher	Ácidos aminos y proteínas
Bongenberg de Jong	Coacertividad en la química de los coloides
P. Debye y E. Hückel	Teoría Debye-Hückel para PEL fuertes
Staudinger	Concepción de las macromoléculas
Katsschasky	Extensión la teoría de Debye-Hückel al sistema macroión-contraión
Katsschasky	Efecto de los sitios de carga en la macromolécula en sus propiedades en solución mediante un término de energía electrostática libre
Manning	Teoría de condensación de los contraiones
Odijk	Modelo basado en la “cadena tipo gusano”
Gennes	Modelo para PEL débiles utilizando el concepto de escalamiento para polímeros no cargados

**Tabla 1. Eventos relevantes sobre polielectrolitos**

Para la deducción de la ecuación de Poisson-Boltzmann linealizada, se inicia la discusión de la tarea mediante la exposición, por parte del docente, de los tópicos de campo y el potencial eléctricos, llegándose hasta el planteamiento de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Psi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (1)$$

donde  $\Psi$  es el potencial eléctrico,  $\rho$  es la distribución de carga del sistema,  $\varepsilon$  es la constante dieléctrica del material y  $\varepsilon_0$  es la constante dieléctrica del medio.

A partir de este punto, los equipos inician los trabajos de sus respectivas tareas, no permitiéndoseles a los estudiantes interactuar con ningún estudiante del otro equipo.

Una vez expuestos los temas de campo y potencial eléctricos, se pide a los estudiantes del primer equipo que obtengan una expresión, en términos lineales, para la aproximación de campo medio de la distribución de carga.

$$\rho = \sum_i n_i^0 z_i e \exp\left(-\frac{z_i e \Psi}{kT}\right) \quad (2)$$

En la expresión anterior  $z_i$  es la valencia de la  $i$ -ésima especie iónica,  $e$  es la carga elemental,  $n_i^0$  es la concentración de dicha especie,  $k$  es la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura.

La expresión a la que se debe llegar es la misma a la cual llegan los autores del artículo:

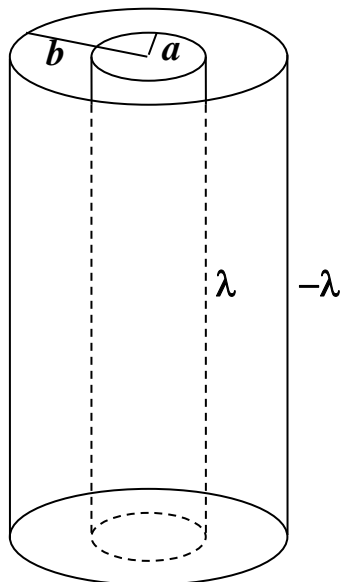
$$\rho = -2n^0 z^2 e^2 \frac{\Psi}{kT} \quad (3)$$

Con ello se obtiene la generalización para zwitteriones de la ecuación de Debye-Hückel.



$$\nabla^2\Psi = \lambda_M^2\Psi \tag{4}$$

Para nivelar la carga de trabajo de los dos equipos formados, se pidió al primer equipo que también resolviera PBLZ, ecuación 4, en coordenadas esféricas, habiendo tenido que llegar hasta encontrar el parámetro de interacción  $\Psi_M$ .



**Figura 1. Modelo ideal de un cilindro coaxial**

La segunda tarea parte del modelo ideal de un cilindro coaxial, ver figura 1, el cual contiene una región dieléctrica, las cáscaras cilíndricas, de radios  $a$  y  $b$  poseen densidades de cargas lineales y uniformes de signos opuestos,  $\lambda$  y  $-\lambda$ , respectivamente. Por último, la longitud del cilindro se toma muy grande para despreciar los efectos de los extremos.

Los estudiantes deben expresar la función potencial en coordenadas cilíndricas, tal como lo proponen los autores del artículo:

$$\Psi = \Psi(\rho, \varphi) \tag{5}$$

y de ahí separarla en términos de las variable de interés  $\rho$  y  $\varphi$ , para obtener dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, mediante el método de variables separables:

$$\frac{d^2Q}{d\varphi^2} + n^2Q = 0 \tag{6}$$

cuya solución es  $Q(\varphi) = A\text{sen}(n\varphi) + B\text{cos}(n\varphi)$  y

$$\rho^2 \frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - n^2 = 0 \tag{7}$$

con solución  $R(\rho) = \rho^n + \rho^{-n}$ .

Estas dos ecuaciones fueron discutidas por el segundo equipo, sin embargo, sus soluciones fueron discutidas por todo el grupo, no solo por los integrantes del segundo equipo, ya que son de gran interés para los propósitos del presente trabajo.

Una vez hecha la discusión de las soluciones planteadas para las eq. (6) y (7), continúa la tarea del segundo equipo con la solución general en términos de  $\rho$  y  $\varphi$ , propuesta en el artículo.

$$\Psi(\rho, \varphi) = \sum A_n \text{sen}(n\varphi) (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) + D_0 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \tag{8}$$

Una vez concluidas las dos tareas por parte de los estudiantes, se tuvo una sesión de discusión en la cual el grupo habló acerca de los logros obtenidos, así como de la metodología usada.

Una vez terminadas las tareas por ambos equipos y hechas las conclusiones respectivas, el docente, a modo de seminario, desarrolla la solución con las condiciones a la frontera especificadas por los autores.

$$\Psi(a, \varphi) = V_a \tag{9a}$$

$$\Psi(b, \varphi) = V_b \tag{9b}$$

Donde  $V_a$  y  $V_b$  son los potenciales de las cáscaras cilíndricas.

A partir de (8), (9a) y (9b), y después de un poco de matemáticas, se llega finalmente a la expresión para los coeficientes de la solución general, en términos de  $\varphi$ , los cuales muestran la forma siguiente:

$$E_{n'} = \left( \frac{b^{n'}}{b^{2n'} + a^{2n'}} \right) \int d\varphi \operatorname{sen}(n'\varphi) V_0. \quad (10)$$

Por último, se presentaron los adelantos de este trabajo por parte de los estudiantes, y bajo la asesoría del docente, en el Tercer Congreso Nacional de Metalurgia y Materiales, desarrollado en la Ciudad de Monclova, Coah., del 28 al 30 de septiembre de 2005 <sup>(7)</sup> y en el cual los estudiantes tuvieron la oportunidad de interactuar con profesionales de la ingeniería, tanto en investigación como en industria.

## CONCLUSIONES

La metodología del ABP fue bien recibida por los estudiantes de ingeniería. Uno de los puntos donde todos los estudiantes estuvieron de acuerdo fue cambiar su rol en el salón de clases, pasando de una actitud totalmente pasiva, en la que no hablar era una virtud, a una actitud activa en la que hasta la profundidad con la que se tocan los temas les corresponde establecerla a ellos. Otro de los puntos motivantes que consideraron fue que el docente se despojó de su aureola de omnipotente, al aceptar tanto críticas como otras posibles soluciones a los problemas planteados en el salón de clases, por lo que los estudiantes participaron más en las discusiones.

Para el docente esta fue una experiencia con la que pudo transmitir a los estudiantes conocimientos más allá del contenido del curso, e involucrar a la institución en este tipo de metodologías educativas, que todavía no son aceptadas por todos los docentes.

El principal problema al que se tuvo que enfrentar el grupo fue el tiempo, debido principalmente a que el total de los cursos todavía están diseñados a partir de modelos de enseñanza directos y de aprendizaje receptivos, además de que la estrategia didáctica más utilizada es la lección magistral. Por ese motivo, el grupo tuvo que realizar un esfuerzo extra-clase para poder cubrir las metas planteadas.

Por experiencia de los autores, este tipo de metodologías, donde los estudiantes son el centro del proceso enseñanza-aprendizaje, pueden ser perfectamente implementadas en las carreras de ingeniería, pues ya se tiene el antecedente de que los estudiantes que seleccionan la tesis como trabajo de titulación trabajan bajo un esquema similar, aunque en muchas ocasiones informal desde el punto de vista de la educación, es decir, es suficiente que el estudiante llegue al resultado buscado, sin evaluar la forma como lo consigue ni el valor agregado que pudo haber obtenido durante el desarrollo de su trabajo de tesis.

## Bibliografía

- Declaración conjunta para la armonización del diseño del Sistema de Educación Superior Europeo. A cargo de los cuatro ministros representantes de Francia, Alemania, Italia y el Reino Unido. La Soborna, París, 25 de mayo de 1998.
- Alfonso Roca, M.T. (2003) Metodología Docente e Innovación Pedagógica. En: I Congreso Nacional de Calidad de la Enseñanza en Fisioterapia. Facilitando el aprendizaje: 8-10 de mayo de 2003. Murcia: Universidad de Murcia.
- Pérez Díaz, V. Carácter y evolución de la universidad española, en: Claves de Razón Práctica. 136, Octubre.
- Maudsley, G.; Strivens, J. (2000) Promoting professional knowledge, experiential learning and critical thinking for medical students. *Medical Education*. 34, (7) pp. 535-544.