

<https://doi.org/10.23913/ride.v13i25.1322>

Artículos científicos

Construcción de índices de capacidad para el análisis y evaluación de procesos con múltiples respuestas

***Construction of Capacity Indices for the Analysis and Evaluation of
Processes with Multiple Responses***

***Construção de índices de capacidade para análise e avaliação de processos
com múltiplas respostas***

Guillermo Cuamea Cruz

Universidad de Sonora, México

guillermo.cuamea@unison.mx

<https://orcid.org/0000-0001-8884-6825>

Manuel Arnoldo Rodríguez Medina

Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez, México

manuel_rodriguez_itcj@yahoo.com

<https://orcid.org/0000-0003-1676-0664>

Eduardo Rafael Poblano Ojinaga

Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez, México

pooe_65@hotmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-3482-7252>

Rafael García Martínez

Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Hermosillo, México

garmmx@yahoo.com

<https://orcid.org/0000-0001-7175-5361>

Diego Adiel Sandoval Chávez

Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez, México

dsandoval@itcj.edu.mx

<https://orcid.org/0000-0002-2536-1844>

Resumen

Los productos fabricados actualmente tienen varias características de calidad, todas tienen importancia para el cliente, y controlarlas y evaluarlas se ha convertido en una actividad de primer interés. La industria automotriz establece índices de capacidad para evaluar la capacidad de los procesos donde se tiene únicamente una variable de respuesta, y cuando estos son estables se recomienda utilizar el C_p y el C_{pk} como medibles de la capacidad del proceso de manufactura para manufacturar productos que cumplan con las especificaciones y sean catalogados como productos de calidad. Para evaluar la calidad completa de un producto, la cual depende de que se cumpla con varias características de calidad simultáneamente, existen propuestas en la literatura de cómo medir la capacidad de procesos multivariados; la mayoría de estas coinciden en que se debe establecer claramente una región de especificación que represente lo que establece el cliente y otra región que muestre la variación como medida de desempeño del proceso. En la definición de ambas regiones existe una gran controversia entre los autores, lo que lleva a presentar esta nueva propuesta, mediante la cual se definen de manera confiable estas dos regiones mencionadas, y al hacer una comparación entre ellas se pueden obtener los índices de capacidad multivariados C_{pm} y el C_{pkm} y el como una extensión de los índices univariados C_p y el C_{pk} . El documento incluye el análisis de datos de un proceso donde el producto, para ser de buena calidad, debe cumplir con dos características de calidad simultáneamente. Las mediciones obtenidas del proceso se pueden representar por una distribución normal multivariada, lo que permite medir la capacidad del proceso utilizando los índices propuestos y realizar una interpretación de estos en relación con el desempeño del proceso.

Palabras clave: capacidad del proceso, índices de capacidad, procesos multivariados, regiones de especificación.

Abstract

Currently manufactured products have several quality characteristics, all of which are important to the customer, and controlling and evaluating them has become an activity of prime interest. The automotive industry establishes capacity indices to evaluate the capacity of processes where there is only one response variable, and when these are stable, it recommends using C_p and C_{pk} as measures of the capacity of the manufacturing process to manufacture products that comply with specifications and are cataloged as quality products. To evaluate the complete quality of a product, which depends on meeting several quality characteristics simultaneously, there are proposals in the literature on how to measure the capability of multivariate processes; most of these agree that a specification region should be clearly established to represent the customer's requirements and another region to show the variation as a measure of process performance. In the definition of both regions there is a great controversy among the authors, which leads to present this new proposal, by which these two regions are defined in a reliable way, and by making a comparison between them, the multivariate capacity indexes C_{pm} and C_{pkm} can be obtained as an extension of the univariate indexes C_p and C_{pk} . The document includes the data analysis of a process where the product to be of good quality must meet two quality characteristics simultaneously. The measurements obtained from the process can be represented by a multivariate normal distribution, which allows measuring the process capability using the proposed indexes and interpreting them in relation to the process performance.

Keywords: process capability, capability indices, multivariate processes, specification regions.

Resumo

Os produtos fabricados atualmente possuem diversas características de qualidade, todas importantes para o cliente, e controlá-los e avaliá-los tornou-se uma atividade de grande interesse. A indústria automotiva estabelece índices de capacidade para avaliar a capacidade de processos onde há apenas uma variável de resposta, e quando estes estão estáveis, recomenda o uso de C_p e C_{pk} como medidas da capacidade do processo de fabricação em fabricar produtos que atendam às especificações e sejam catalogados como produtos de qualidade. Para avaliar a qualidade completa de um produto, que depende do cumprimento de várias características de qualidade simultaneamente, existem propostas na literatura sobre

como medir a capacidade de processos multivariados; a maioria concorda que uma definição clara deve ser estabelecida. que representa o que o cliente estabelece e outra região que mostra a variação como medida de desempenho do processo. Na definição de ambas as regiões há grande controvérsia entre os autores, o que leva a apresentar esta nova proposta, pela qual estas duas regiões são definidas de forma fiável, e fazendo uma comparação entre elas é possível obter os índices de capacidade multivariados C_{pm} e C_{pkm} como uma extensão dos índices univariados C_p e C_{pk} . O documento inclui a análise de dados de um processo onde o produto para ser de boa qualidade deve atender a duas características de qualidade simultaneamente. As medições obtidas a partir do processo podem ser representadas por uma distribuição normal multivariada, permitindo que a capacidade do processo seja medida utilizando os índices propostos e uma interpretação destes índices em relação ao desempenho do processo.

Palavras-chave: capacidade de processo, índices de capacidade, processos multivariados, regiões de especificação.

Fecha Recepción: Enero 2022

Fecha Aceptación: Octubre 2022

Introducción

La globalización internacional o internacionalización, la mayor competitividad de las empresas, el crecimiento de la productividad se puede lograr mediante la aplicación eficiente y la innovación de las tecnologías existentes (Prokopenko, 1998). Al mismo tiempo, el propio Prokopenko (1998) menciona que la mano de obra capacitada con actitud positiva hacia el cambio y el aprendizaje de nuevos conceptos incrementa la productividad y la competitividad de las empresas y del país.

El incremento de la tecnología moderna ha provocado que la exigencia sobre los productos y los procesos también se haya incrementado, y que los controles y las evaluaciones sobre estos sean más estrictos y de diferente índole, dado que se necesitan productos con características que satisfagan las necesidades y expectativas de los clientes (Poblano, Sanchez, Rodriguez, Valles y Gonzalez, 2020; Rodriguez, Poblano, Rodriguez y Alvarado, 2021). Así, los controles sobre el proceso y los controles preventivos deben efectuarse con mayor conocimiento de la ocurrencia de las fallas por la existencia de las causas que la provocan. Se deben conocer más ampliamente los modos de falla del diseño para evitar que los modos de falla del proceso no alteren la calidad y la confiabilidad de los

productos terminados. Por lo tanto, debe quedar claro si el proceso de fabricación actual tiene la habilidad o capacidad de cumplir con los objetivos de diseño del producto, al mismo tiempo que se cumplen los objetivos de calidad y confiabilidad.

Los estudios iniciales de proceso, considerados desde el punto de vista normativo, se llevan a cabo para verificar si el nivel de capacidad o desempeño inicial del proceso es aceptable. Al respecto, deben considerarse índices de calidad o desempeño, según el comportamiento del proceso, esto únicamente en el caso de procesos con variable de respuesta univariados. Además, se considera que, si el proceso es estable, los índices deberán ser el C_p y el C_{pk} , cuyos nombres son *índice de capacidad potencial* e *índice de capacidad real*, respectivamente; aquí $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ o $\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4}$. En caso de procesos inestables, a los índices se les denomina *índices de desempeño*, citándose como P_p y P_{pk} , donde la estimación de la variación deberá hacerse con todos los datos medidos (al menos 100 desde el punto de vista normativo y bajo rigurosidad estadística). Juran (1974) fue de los primeros en presentar una manera formal para medir la calidad mediante el C_p , el cual es una relación de variaciones, la variación permitida por el cliente en la tolerancia permitida y la variación del proceso considerada la diferencia entre los límites de tolerancia natural superior e inferior; esto es:

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{LTNS - LTNI} = \frac{Tolerancia}{6\sigma}$$

Se debe observar que el C_p no considera en su cálculo dónde se encuentra localizado el proceso en relación con las especificaciones, por lo que restringe el análisis a verificar si la variación del proceso es adecuada a la variación requerida por el cliente.

Kotz y Johnson (2002) simplifican la notación al representar LSE como U y LIE como L . Además, para mediciones univariadas, la variable será representada por X y su valor esperado y varianza serán dados por $E(X)$ y $Var(X)$, respectivamente. Así:

$$C_p = \frac{U - L}{6\sigma} = \frac{d}{3\sigma}$$

Cabe señalar que en la anterior fórmula $d = \frac{U-L}{2}$. Ahora bien, considerando $M = \frac{U+L}{2}$, y siendo un proceso centrado en especificaciones, las distancias desde cualquiera de las especificaciones hasta el valor nominal toman el mismo valor, es decir, $M - LIE = LSE - M$. Si consideramos que el proceso se puede modelar como una distribución normal en la que se realiza el supuesto de que la media del proceso es el valor nominal de las especificaciones, y sin alterar la variación original del proceso, se pueden llevar a cabo las operaciones

algebraicas siguientes, tal y como lo sugieren (Cuamea & Rodriguez, 2014), lo cual no altera el valor que se obtendría con la fórmula original:

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{LTNS - LTNI} = \frac{Tolerancia}{6\sigma}$$

Así entonces:

$$C_p = \frac{(LSE - LIE)/2}{3\sigma}$$

la cual se puede escribir como:

$$C_p = \frac{M - LIE}{3\sigma} = \frac{LSE - M}{3\sigma}$$

y se puede observar que:

$$C_p = \frac{M - LIE}{3\sigma} = \frac{Z_c}{3} = \sqrt{\frac{Z_c^2}{9}} = \sqrt{\frac{\chi_{c,1}^2}{9}}$$

$$C_p = \frac{LSE - M}{3\sigma} = \frac{Z_c}{3} = \sqrt{\frac{Z_c^2}{9}} = \sqrt{\frac{\chi_{c,1}^2}{9}}$$

Las ecuaciones propuestas proporcionan el mismo resultado de la capacidad de un proceso, el cual tiene solamente una característica de calidad crítica o importante en el sentido de que para toda distribución normal estándar se puede asociar una χ^2 con grados de libertad igual a 1; por otro lado, el valor de 9 corresponde a una χ^2 con un grado de libertad que cubre una densidad de 0.9730, como lo describen (Cuamea & Rodriguez, 2014). De esta manera, se perfila una forma más conveniente de calcular el C_p en esta investigación, lo cual se va a tomar como base para poder extenderlo a procesos multivariados usando la distancia de Mahalanobis (es una medida de distancia que toma en cuenta la correlación que pudiera existir entre dos variables y es usada para determinar la similitud entre dos variables), como específica (Peña, 2002). La función de distribución de probabilidad que se asocia a la distancia de Mahalanobis corresponde a una ji cuadrada con grados de libertad igual al número de variables o características de calidad críticas del proceso (Peña, 2002).

Kane (1986) propuso un índice para determinar si un proceso dado tiene la capacidad de producir productos de buena calidad y una característica de esta propuesta es que en su cálculo se toma en cuenta la localización del proceso. Este índice viene dado por:

$$C_{pk} = \min \left\{ \frac{LSE - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LIE}{3\sigma} \right\}$$

El C_{pk} analiza la localización del proceso, pero sin tomar en cuenta su valor objetivo (T). Usando la notación dada por Kotz y Johnson (2002), el C_{pk} será:

$$C_{pk} = \frac{d - |U - M|}{3\sigma} = \frac{\min\{U - \mu, \mu - L\}}{3\sigma}$$

El índice C_{pm} fue entonces creado para corregir ese problema, y se calcula mediante:

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

La modificación del C_{pm} será de la forma siguiente:

$$C_{pm} = \frac{d}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{d}{3\sqrt{E[(X - T)^2]}}$$

El C_{pm} es denominado *índice de Taguchi* por su creador, Genichi Taguchi (1985).

Pearn, Kotz y Johnson (1992) desarrollaron el índice C_{pmk} , el cual se puede utilizar para aquellas situaciones donde el valor *target* (T) no se encuentre dentro de las especificaciones. Este es una combinación del C_{pk} y el C_{pm} , y la forma de obtenerlo es la siguiente:

$$C_{pmk} = \min \left[\frac{LSE - \mu}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \frac{\mu - LIE}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \right]$$

La modificación del C_{pmk} se muestra a continuación como lo describen Wu, Pearn y Kotz (2009), la cual viene dada como:

$$C_{pmk} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sqrt{E[(X - T)^2]}}$$

Kotz y Johnson (2002) muestran la relación entre los diferentes índices. Claramente se puede establecer que:

$$C_p \geq C_{pk} \geq C_{pmk} \text{ y } C_p \geq C_{pm} \geq C_{pmk}.$$

Y la relación entre C_{pk} y C_{pm} se muestra enseguida:

$$C_{pk} = C_p - \frac{1}{3} \left| \frac{\mu - M}{\sigma} \right|$$

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma} \right)^2}}$$

Por cierto, si $T = M$, la relación entre C_p , C_{pk} , C_{pm} será:

$$C_{pk} = C_p - \sqrt{\left(\frac{C_p}{C_{pm}} \right)^2 - 1}$$

Planteamiento del problema

Para aquellos procesos donde la calidad de sus productos dependa del cumplimiento simultáneo de varias características de calidad se han propuesto algunos medibles de la capacidad del proceso que se pueden catalogar como extensiones de sus contrapartes univariados. Sin embargo, como lo establecen Foster, Barton, Gautam, Truss y Tew (2005), aún no existe una metodología consistente para calcular índices de capacidad multivariante, por lo que a la fecha no hay consenso sobre el uso de un índice en particular. La propuesta de este trabajo es modificar las ecuaciones para obtener los índices de capacidad propuestos por Cuamea y Rodriguez (2014), considerando que los parámetros poblacionales de la distribución normal multivariada, como son el vector de medias y la matriz de varianzas-covarianzas, en aplicaciones prácticas no se van a conocer, ya que solo se tiene una muestra de observaciones para dos o más características de calidad del proceso, de tal manera que con esta muestra se pueda evaluar la calidad de un proceso al relacionar la región de especificación de ingeniería con una región de variación natural de un proceso multivariado. Dicha evaluación dará como resultado el cálculo de índices de capacidad que representen el desempeño del proceso de una manera consistente, tomando en cuenta la información contenida en cada una de las variables o características de calidad (Cuamea & Rodriguez, 2014). De lo anterior se observa que es importante considerar si las variables están o no correlacionadas antes de medir la capacidad del proceso, pero esto puede ser complejo al momento de hacer los cálculos y de interpretar los resultados, ya que los límites de especificación para cada característica de calidad no se pueden representar simplemente como dos líneas verticales que se asemejen a una portería; en este caso, por un lado, se deben representar por hiperrectángulos, y por otro, la región de variación natural del proceso se tendrá que representar por elipsoides.

Los trabajos de investigación enfocados en definir índices de capacidad para procesos multivariados iniciaron en la década de 1990 y hasta la fecha diferentes autores han dado a conocer varias propuestas. Estas propuestas se pueden dividir en cuatro grupos diferentes, como lo sugirieron primeramente (Khadse & Shinde, 2009) y posteriormente (de-Felipe & Benedito, 2017). Estos grupos son:

- Grupo 1: índices de capacidad que se obtienen del cociente entre la región de tolerancia y la región de variación del proceso, una de estas propuestas es la de que presentaron (Taam et al., 1993) (Pana & Lee, 2010).

- Grupo 2: estos índices se basan en la probabilidad de producto no conforme, como el índice propuesto por Wierda (1994), (Bothe, 1999), (Castagliola & Castellanos, 2008) y (de-Felipe & Benedito, 2017).
- Grupo 3: aquí se agrupan aquellos índices basados sobre el análisis de componentes principales, uno de los trabajos más citados en este grupo es la propuesta que hicieron (Wang & Chen, 1998).
- Grupo 4, llamado *otros*, en este grupo se encuentra la propuesta de Shahriari, Hubele y Lawrence (1995) y Barreto y Herrera (2021).

Un resumen de las propuestas presentadas por los diferentes autores se encuentra en la tabla 1 y es fácil darse cuenta, observando la columna tres de la tabla, que la mayoría de los índices propuestos requieren de una distribución normal multivariada, y en la columna cuatro de la tabla se observa que la mayoría de ellos pertenecen al primer grupo.

Tabla 1. Índices de capacidad encontrados en la literatura en el período de 1993-2021

Autor	Índice	DNM	Grupo
Taam <i>et al.</i> (1993)	MC_{pm}	Sí	1
Chen (1994)	MC_p	Sí	1
Shahriari <i>et al.</i> (1995)	$MPCV$	Sí	4
Wang y Chen (1998)	MC_p, MC_{pk}, MC_{pm} y MC_{pmk}	Sí	1 y 3
Wang y Du (2000)	MC_p y MC_{pc}	Sí	1 y 3
Yeh y Chen (2001)	MC_f	No	2
Castagliola <i>et al.</i> (2005)	BC_p y MC_{pk}	Sí	2
Wang (2005)	MC_p y MC_{pk}	Sí	1 y 3
Wang (2006)	MC_{pc}	No	4
Pearn <i>et al.</i> (2007)	MC_p	Sí	1
Castagliola <i>et al.</i> (2008)	BC_p y BC_{pk}	No	2
Shahriari <i>et al.</i> (2009)	$NMPCV$	Sí	1
Ahmad <i>et al.</i> (2009)	PNC_{Total}	No	2
González y Sánchez (2009)	C_n^s	Sí	2 y 3
Shinde y Khadse (2009)	$Mp1$ y $Mp2$	Sí	2 y 3
Pan y Lee (2010)	NMC_{pm}	Sí	1
Goethals y Cho (2010)	MC_{pmc}	Sí	4
Dharmasena <i>et al.</i> (2016)	$T Spk, PC; \beta$	Sí	2 y 3
Cuamea y Rodríguez (2014)	C_{pM}, C_{pkM}	Si	1
Zainab <i>et al.</i> (2019)	$MC'' p(u, v)$	Sí	1
Barreto y Herrera (2021)	MC_{pCR}	Sí	3 y 4

Fuente: (Shinde & Khadse, 2009) y (Barreto & Acosta Roberto, 2021)

Método

El método utilizado para el desarrollo de índices de capacidad multivariados utiliza principalmente las bases teóricas de la distribución normal multivariada, así como las propiedades asociadas a dicha distribución.

Bases para obtención del índice C_{pM}

Peña (2002) describe la distribución normal escalar como función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Así, descrita como $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, establece que x tiene una distribución normal con media y varianza μ y σ^2 , respectivamente.

Generalizando la función anterior, se puede decir que un vector x sigue una distribución normal p -dimensional si su función de densidad es:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} (2\pi)^{-p/2} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)' \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}$$

En este caso, μ es la media del vector aleatorio normal y Σ es la matriz de varianzas y covarianzas.

Un vector x con distribución normal p -dimensional con matriz Σ no singular puede convertirse en un vector z normal p -dimensional con media 0 y matriz de varianzas y covarianzas igual a la matriz identidad I . La función de densidad de z será:

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}'\mathbf{z}} = \prod_{i=1}^p \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}z_i^2}$$

La distribución normal multivariada presenta una propiedad básica muy importante mediante la cual toda curva de nivel en la distribución es un elipsoide con un valor de confianza $(1 - \alpha)$, la cual tiene una distribución χ^2 con grados de libertad igual al número de variables (Peña, 2002). Así, para cualquier valor de una de las variables aleatorias se le podrá asociar un elipsoide con confianza $(1 - \beta_i)$. El cálculo del C_{pM} propuesto por (Cuamea & Rodríguez, 2014) está dado por la ecuación siguiente:

$$C_{pM} = \min \left\{ \sqrt{\frac{\chi_{\beta_i}^2}{\chi_{0.0027, m}^2}} \mid i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

Para cada una de las especificaciones deberán obtenerse dos valores de $\chi_{\beta_i}^2$, donde cada valor se obtiene relacionando cada límite de especificación con su valor nominal, como se muestra a continuación para la primera variable:

$$\chi_{\beta_1, inf}^2 = \frac{(LEI_1 - \mu_1)^2}{|\Sigma| |\Sigma_1^{-1}|}, \chi_{\beta_1, sup}^2 = \frac{(LES_1 - \mu_1)^2}{|\Sigma| |\Sigma_1^{-1}|}$$

Allí μ_1 es el valor nominal de las especificaciones.

Si las desviaciones estándar de todas las variables consideradas en el proceso son modificadas mediante $\tilde{\sigma}_i = C_{pM}\sigma_i$, el proceso será potencialmente capaz de cumplir con todas las especificaciones de manera simultánea. Si los valores transformados son sustituidos en la matriz de varianzas y covarianzas Σ , los valores en la diagonal principal tomarán la forma:

$$C_{pM}^2\sigma_i^2$$

Y los valores fuera de la diagonal principal, es decir, las covarianzas en el renglón i y la columna j serán:

$$C_{pM}^2\sigma_i\sigma_j$$

Y la nueva de matriz de varianzas y covarianzas será $\tilde{\Sigma} = C_{pM}^2\Sigma$, cumpliéndose que $|\tilde{\Sigma}| = C_{pM}^{2m}|\Sigma|$. La inversa de la nueva matriz de varianzas y covarianzas es calculada mediante:

$$|\tilde{\Sigma}^{-1}| = \frac{1}{|\tilde{\Sigma}|} = \frac{1}{C_{pM}^{2m}|\Sigma|}$$

Los límites de tolerancia natural superior e inferior de la característica de calidad i son:

$$LTN_i = \mu_{ci} \pm \sqrt{|\tilde{\Sigma}| |\tilde{\Sigma}_i^{-1}| \chi_{0.0027,m}^2}$$

Al sustituir los valores, se tiene:

$$LTN_i = \mu_{ci} \pm \sqrt{C_{pM}^2|\Sigma| |\Sigma_1^{-1}| \chi_{0.0027,m}^2} = \mu_{ci} \pm \sqrt{\frac{\chi_{\beta_i}^2 |\Sigma| |\Sigma_i^{-1}| \chi_{0.0027,m}^2}{\chi_{0.0027,m}^2}}$$

Y simplificando:

$$LTN_i = \mu_{ci} \pm \sqrt{|\Sigma| |\Sigma_1^{-1}| \chi_{\beta_i}^2}$$

Obtención del índice C_{pkM}

El C_{pkM} propuesto en el trabajo de (Cuamea & Rodriguez, 2014) es un índice que debe tomar en cuenta la ubicación actual del proceso, similar al caso univariado. La ecuación para el cálculo será:

$$C_{pkM} = \min \left\{ \frac{\chi_{\beta_i}^2}{\sqrt{\chi_{0.0027,m}^2}} \right\} \text{ para } i = 1, 2, \dots, m$$

Al igual que en el caso del C_{pM} , por cada variable debemos obtener dos valores de $\chi_{\beta_i}^2$, asociados a las especificaciones inferior y superior de cada una de las variables, por ejemplo, para la variable 1, utilizaremos la notación siguiente:

$$\chi_{\beta_{1,inf}}^2 = \frac{(LEI_1 - \mu_1)^2}{|\Sigma| |\Sigma_1^{-1}|}, \chi_{\beta_{1,sup}}^2 = \frac{(LES_1 - \mu_1)^2}{|\Sigma| |\Sigma_1^{-1}|}$$

Donde los valores de μ_i son los promedios reales de las variables respectivas. Por cada variable con una especificación inferior y otra superior deberán obtenerse dos valores posibles para el C_{pkM} y es común que los procesos no estén centrados, y de aquí $C_{pkM} < C_{pM}$, y a medida que $\mu \rightarrow \mu_c$, donde μ_c es el valor nominal de las especificaciones, entonces $C_{pkM} \rightarrow C_{pM}$.

Decisiones sobre el proceso de acuerdo con los índices

Recordando que el C_{pkM} es un índice que considera la ubicación del proceso y la variación con que contribuyen las variables involucradas, tener un valor de $C_{pkM} > 1$ indica que el proceso es capaz de cumplir con las especificaciones; en caso contrario, el proceso requiere ajustes. Si $C_{pkM} < C_{pM}$, los ajustes requeridos del proceso deberán ser el mover la media hacia el centro de las especificaciones. Si el $C_{pM} < 1$, principalmente los ajustes en el proceso deberán enfocarse en reducir su variabilidad.

El desarrollo anterior es el propuesto por (Cuamea & Rodriguez, 2014), el cual requiere que se conozca el vector de medias de la distribución normal multivariada, así como la matriz de varianzas-covarianzas de dicha distribución. La propuesta presentada en este trabajo toma como base el trabajo de (Cuamea & Rodriguez, 2014), sí, pero toma en consideración que en la práctica no se conocen los valores reales de las varianzas y, por lo tanto, tampoco la correlación real entre las variables, por lo que deben utilizarse los valores muestrales. Lo mismo sucede con el vector de medias. El método de máxima verosimilitud aplicado a la normal multivariada lleva a que los mejores estimadores son el vector de medias muestral \bar{X} y la matriz de varianzas-covarianzas muestral S . Un resultado en estadística multivariada establece que la expresión $(x - \mu)^T S^{-1} (x - \mu)$ sigue una distribución T^2 de Hotelling (Peña, 2002), que se relaciona con la distribución F de Fisher mediante la relación

$F_{m,n-m} = \frac{(n-m)T_{m,n-m}^2}{m(n-1)}$. Por lo tanto, en los desarrollos anteriores solo se requiere realizar el cambio de $\chi_{(1-\alpha),m}^2$ por la variable $F_{m,n-m}$ que satisfaga el valor $1 - \alpha$ requerido. Las regiones de variación del proceso seguirán siendo elipses (en dos dimensiones):

$$(x - \mu)^T S^{-1} (x - \mu) = T_{m,n-m}^2 = \frac{m(n-1)F_{m,n-m}}{(n-m)}.$$

Si se toma como base la ecuación $LTN_i = \mu_{c_i} \pm \sqrt{|\Sigma||\Sigma_1^{-1}|\chi_{\beta_i}^2}$ para obtener los límites de tolerancia natural del proceso, la cual supone el conocimiento de los parámetros del proceso, deberá modificarse usando los estimadores para el vector de medias y para la matriz de varianzas covarianza de la siguiente manera: $LTN_i = \bar{X}_{c_i} \pm \sqrt{|\mathcal{S}||\mathcal{S}_i^{-1}|T_{m,n-m}^2}$. Si se despeja el valor correspondiente de la $T_{m,n-m}^2$, se obtiene que:

$$T_{m,n-m}^2 = \frac{(LTN_i - \bar{X}_{c_i})^2}{|\mathcal{S}||\mathcal{S}_i^{-1}|}, i = 1, 2, \dots, m$$

Dado que los límites de tolerancia natural están igualmente espaciados con respecto al vector de medias, darán como resultado el mismo valor de $T_{m,n-m}^2$ para una misma variable o característica de calidad.

Resultados

Chen (1994) considera dos ejemplos numéricos donde aplica índices de capacidad citados en la literatura. En este trabajo, los datos del primer ejemplo que se muestran en la tabla 2, se utilizaron para calcular los índices de capacidad con la modificación planteada.

Tabla 2. Datos de las variables, dureza brinell (H) y resistencia a la tensión (S)

H	S	H	S	H	S
143	34.2	141	47.3	178	50.9
200	57.0	175	57.3	196	57.9
168	47.5	187	58.5	160	45.5
181	53.4	187	58.2	183	53.9
148	47.8	186	57.0	179	51.2
178	51.5	172	49.4	194	57.5
162	45.9	182	57.2	181	55.6
215	59.1	177	50.6		
161	48.4	204	55.1		

Fuente: Chen (1994)

En este ejemplo se usa una distribución normal bivariada. Las variables citadas son la dureza Brinell (H) y la resistencia a la tensión (S). Las tolerancias de ingeniería para las características de calidad mencionadas son:

$$\text{Dureza } LEI = 112.3 \text{ } LES = 241.7$$

$$\text{Resistencia } LEI = 32.7 \text{ } LES = 73.3$$

$$\text{Vector de valores nominales: } [177 \quad 53]$$

Cuando se analizaron las 25 mediciones que se obtuvieron para las características de calidad se encuentran que los promedios para ambas variables respectivamente son: $[177.2 \quad 52.316]$ y que la matriz de varianzas y covarianzas viene dada por:

$$S = \begin{bmatrix} 338 & 88.8925 \\ 88.8925 & 33.6247 \end{bmatrix}$$

Además, su determinante es 3463.3, y su matriz inversa es:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0097 & -0.0257 \\ -0.0257 & 0.0976 \end{bmatrix}$$

En la figura 1 se muestran las regiones tanto de especificación como del proceso. Tomando en cuenta los datos proporcionados y para el cálculo del C_{pM} , vamos a suponer que el promedio del proceso se encuentra centrado en relación con las especificaciones, lo cual significa que las \bar{x}_i representan los valores nominales de las especificaciones para cada una de las variables o características de calidad.

Obtención de los valores de $T_{m,n-m}^2$ con respecto a los valores nominales para el cálculo del C_{pM}

Las $T_{m,n-m}^2$ asociadas con las especificaciones de la variable *dureza* son las siguientes:

$$T_{2,23}^2 = \frac{(X_{1,inf} - \bar{x}_1)^2}{|S||S_1^{-1}|} = \frac{(LEI_1 - \bar{x}_1)^2}{|S||S_1^{-1}|} = \frac{(112.3 - 177)^2}{(3463.3)(0.0976)} = 12.3842$$

$$T_{2,23}^2 = \frac{(X_{1,sup} - \bar{x}_1)^2}{|S||S_1^{-1}|} = \frac{(LES_1 - \bar{x}_1)^2}{|S||S_1^{-1}|} = \frac{(241.7 - 177)^2}{(3463.3)(0.0976)} = 12.3842$$

El valor de la $T_{m,n-m}^2$ asociada con la variable *resistencia* será:

$$T_{2,23}^2 = \frac{(X_{2,inf} - \bar{x}_2)^2}{|S||S_2^{-1}|} = \frac{(LEI_2 - \bar{x}_2)^2}{|S||S_2^{-1}|} = \frac{(32.7 - 53)^2}{(3463.3)(0.00976)} = 12.1914$$

$$T_{2,23}^2 = \frac{(X_{2,sup} - \bar{x}_2)^2}{|S||S_2^{-1}|} = \frac{(LES_2 - \bar{x}_2)^2}{|S||S_2^{-1}|} = \frac{(73.3 - 53)^2}{(3463.3)(0.00976)} = 12.1914$$

Dado que se tienen dos variables, 25 observaciones y utilizando una confianza del 99.73 %, se tiene que la $F_{2,23}$ asociada al proceso toma el valor de 7.73346, lo que implica un valor de:

$$T^2 = \frac{m(n-1)F_{m,n-m}}{(n-m)} = \frac{2(25-1)7.73346}{(25-2)} = 16.1394$$

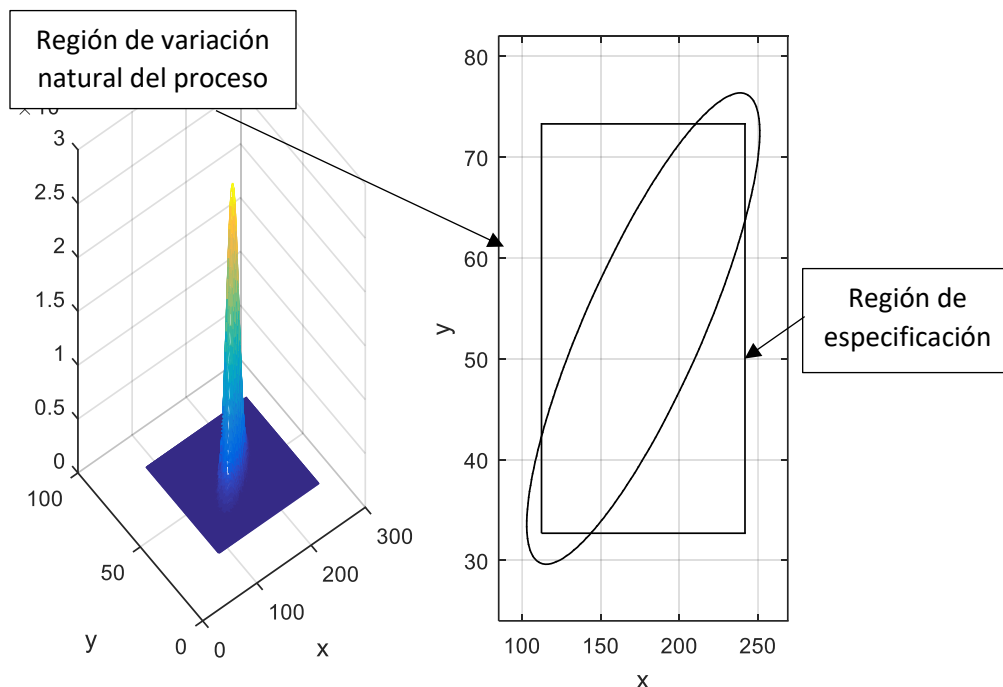
Por lo que el valor del C_{pM} viene dado por:

$$C_{pM} = \min \sqrt{\frac{T_{m,n-m}^2}{T_{(1-\alpha),2,23}^2}} = \min \left[\sqrt{\frac{12.3842}{16.1394}}, \sqrt{\frac{12.1914}{16.1394}} \right] = \min[0.8759, 0.8691]$$

$$= 0.8691$$

Como puede observarse en la figura 1, la región de variación natural del proceso es más grande que la región de las especificaciones, por lo que es fácil deducir que el proceso no es potencialmente capaz de cumplir con las especificaciones, lo cual se ve reflejado también en el valor del C_{pM} . La suposición de que el proceso se encuentra centrado facilita el cálculo del índice.

Figura 1. Región de especificación y región del proceso para H y S, suponiendo que el proceso se encuentra centrado



Fuente: Elaboración propia

Obtención de los valores de $T_{m,n-m}^2$ con respecto al vector de medias para el cálculo del C_{pkM}

El promedio actual para H es de 177.2 y para S es 52.316. Con estos valores se obtendrá el valor del C_{pkM} . La figura 2 muestra la ubicación actual del proceso. Primeramente, se obtendrán los valores de $T_{m,n-m}^2$ para las especificaciones superior e inferior de H y S.

$$T_{2,23}^2 = \frac{(X_{1,inf} - \bar{x}_1)^2}{|S||S_1^{-1}|} = \frac{(112.3 - 177.2)^2}{(3463.3)(0.0976)} = 12.4609$$

$$T_{2,23}^2 = \frac{(X_{1,sup} - \bar{x}_1)^2}{|S||S_1^{-1}|} = \frac{(241.7 - 177.2)^2}{(3463.3)(0.0976)} = 12.3078$$

$$T_{2,23}^2 = \frac{(X_{2,inf} - \bar{x}_2)^2}{|S||S_2^{-1}|} = \frac{(32.7 - 52.316)^2}{(3463.3)(0.00976)} = 11.3836$$

$$T_{2,23}^2 = \frac{(X_{2,sup} - \bar{x}_2)^2}{|S||S_2^{-1}|} = \frac{(73.3 - 52.316)^2}{(3463.3)(0.00976)} = 13.0268$$

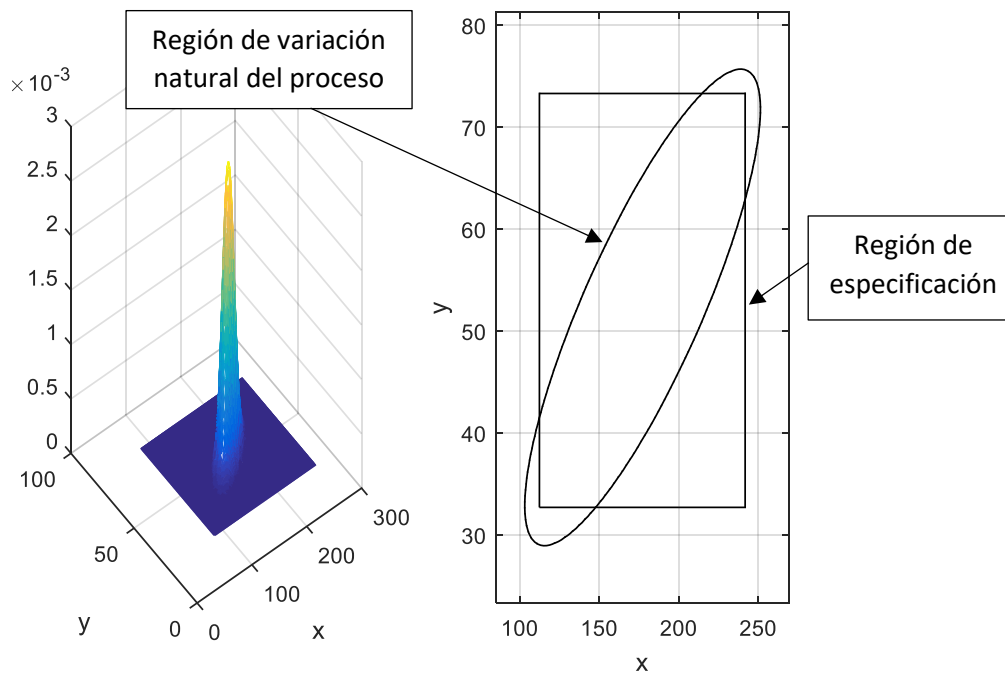
El valor del C_{pkM} se calcula mediante:

$$C_{pkM} = \min \sqrt{\frac{T_{m,n-m}^2}{T_{(0.9973),2,23}^2}} = \min \left[\sqrt{\frac{12.4609}{16.1396}}, \sqrt{\frac{12.3078}{16.1394}}, \sqrt{\frac{11.3836}{16.1394}}, \sqrt{\frac{13.0268}{16.1394}} \right]$$

$$= \min[0.8787, 0.8733, 0.8398, 0.8984] = 0.8398$$

Lo que demuestra que el proceso no es capaz. Esto se debe a que el proceso está ligeramente fuera de la región de especificación, como se observa en la figura 2, donde la región de variación del proceso está ligeramente fuera de la región de especificación.

Figura 2. Región de especificación y región del proceso para H y S, cuando el proceso se encuentra en sus promedios actuales.



Fuente: Elaboración propia

Discusión

Los índices de capacidad multivariados desarrollados en este trabajo son una mejora a los presentados por Cuamea y Rodríguez (2014), dado que son más realistas en el sentido de que utilizan la información de los estimadores contenidos en la muestra y son consistentes dado que miden adecuadamente la capacidad de un proceso, a través de los índices C_{pM} y el C_{pkM} propuestos, los cuales se obtienen al especificar correctamente cuál es la región de especificación y cuál es la región de variación del proceso para m características de calidad analizadas de forma conjunta. Ambas regiones se definen usando la distancia Mahalanobis, lo cual permite definir las como elipsoides, a diferencia de otras propuestas similares que utilizan, en lugar de la distancia Mahalanobis, la razón del volumen de los elipsoides (Shahriari y Abdollahzadeh, 2009; Wang y Chen, 1998), lo cual hace más complejo el cálculo de la capacidad del proceso. Otras propuestas utilizan los componentes principales para determinar la capacidad de un proceso, solo que aún no hay un acuerdo en cuántos componentes principales deben tomarse en cuenta y qué tanta de la variación deben explicar (Barreto y Herrera, 2021; Shinde y Khadse, 2009). Además, estas propuestas no toman en cuenta la información cuando las características de calidad están correlacionadas, información que sí es utilizada en nuestra propuesta para calcular la capacidad de un proceso multivariado. Hay otras propuestas más que obtienen la capacidad de un proceso a partir del cálculo de la fracción defectuosa que está produciendo el proceso (Kotz y Johnson, 2002), lo cual también puede determinarse en nuestra propuesta utilizando simulación Montecarlo.

Se aprecia también que la interpretación de los índices multivariados obtenidos mediante la propuesta que se presenta en este trabajo es consistente con sus contrapartes univariados. En el cálculo de los índices propuestos en esta investigación se obtiene el valor de los límites de tolerancia natural del proceso para cada una de las características de calidad, los cuales nos permiten conocer la región de variación del proceso para cada una de las características, considerando una confianza de 99.73 % (2700 ppm), y gráficamente establecer si un proceso es o no capaz de cumplir con todas las especificaciones. Por otro lado, nuestra propuesta tiene limitaciones, ya que requiere que el proceso pueda ser modelado a través de una distribución normal multivariada y que las m características de calidad posean especificaciones bilaterales y simétricas.

Conclusiones

Los índices de capacidad multivariados propuestos en esta investigación son consistentes con los respectivos índices de capacidad univariados, dado que se aplica el concepto de *distancia* para su cálculo; también se obtienen como un cociente igual que su contraparte univariados. En su cálculo se utiliza la información de las especificaciones, así como la información relativa al proceso contenida en la muestra. Y la interpretación es equivalente a la métrica establecida para los índices de capacidad univariados, en otras palabras, se interpretan de la misma manera. Por otro lado, en su cálculo se analizan las características de calidad en forma conjunta o simultánea, estén o no correlacionadas, y son fáciles de calcular y de interpretar.

Futuras líneas de investigación

En investigaciones futuras se recomienda que se siga trabajando en la definición de índices de capacidad para especificaciones bilaterales para procesos que no se puedan modelar mediante la normal multivariada. Adicionalmente, deberá investigarse con más profundidad el caso de índices de capacidad para procesos con especificaciones unilaterales. De la misma manera, se deben proponer índices de capacidad para especificaciones bilaterales no simétricas.

Referencias

- Barreto, R., & Acosta Roberto, H. (2021). Application of a proposed reliability analysis multivariate capability index on manufacturing processes.
- Bothe, D. R. (1999). Composite capability index for multiple product characteristics. *Quality Engineering*, 12(2), 253–258.
- Castagliola, P., & Castellanos, J. V. G. (2008). Process capability indices dedicated to bivariate non normal distributions. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 14(1), 87–101.
- Chen, H. (1994). A multivariate process capability index over a rectangular solid tolerance zone. *Statistica Sinica*, 4(2), 749–758.
- Cuamea, G., & Rodriguez, M. A. (2014). Propuesta para evaluar la capacidad de procesos de manufactura multivariados. *Revista Ingeniería Industrial*, 13(2), 35–47.
- de-Felipe, D., & Benedito, E. (2017). A review of univariate and multivariate process capability indices. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 92(5–8), 1687–1705.
- Foster, E. J., Barton, R. R., Gautam, N., Truss, L. T., & Tew, J. D. (2005). The process-oriented multivariate capability index. *International Journal of Production Research*, 43(10), 2135–2148.
- Juran. (1974). *Juran's Quality Control Handbook*.
- Kane. (1986). Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, 18(1).
- Khadse, K. G., & Shinde, R. L. (2009). Probability-Based Process Capability Indices. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 38(4), 884–904.
- Kotz, S., & Johnson, N. L. (2002). Process capability indices - A review, 1992-2000. *Journal of Quality Technology*, 34(1), 2–19.
- Kotz, S., & Johnson, N. L. (2018). Process Capability Indices—A Review, 1992–2000. <https://doi.org/10.1080/00224065.2002.11980119>, 34(1), 2–19.
- Pana, J. N., & Lee, C. Y. (2010). New capability indices for evaluating the performance of multivariate manufacturing processes. *Quality and Reliability Engineering International*, 26(1), 3–15.
- Peña, D. (2002). *Análisis de Datos Multivariados*. McGraw Hill.
- Prokopenko, J. (1998). Globalización, competitividad y estrategias de productividad. *Boletín Cinterfor*, 39.

- Shahriari, H., & Abdollahzadeh, M. (2009). A new multivariate process capability vector. *Quality Engineering*, 21(3), 290–299.
- Shinde, R. L., & Khadse, K. G. (2009). Multivariate process capability using principal component analysis. *Quality and Reliability Engineering International*, 25(1), 69–77.
- Taam, W., Subbaiah, P., & Liddy, J. W. (1993). A note on multivariate capability indices. *Journal of Applied Statistics*, 20(3), 339–351.
- Wang, F. K., & Chen, J. C. (1998). Capability index using principal components analysis. *Quality Engineering*, 11(1), 21–27. <https://doi.org/10.1080/08982119808919208>
- Wierda, S. J. (1994). Multivariate statistical process control - recent results and directions. *Statistica Neerlandica*, 48(2), 147–168.
- Wu, C. W., Pearn, W. L., & Kotz, S. (2009). An overview of theory and practice on process capability indices for quality assurance. *International Journal of Production Economics*, 117(2), 338–359.

Rol de Contribución	Autor (es)
Conceptualización	Guillermo Cuamea Cruz
Metodología	Principal: Guillermo Cuamea Cruz Que apoya: Manuel Arnoldo Rodríguez Medina
Análisis Formal	Principal: Guillermo Cuamea Cruz Que apoya: Manuel Arnoldo Rodríguez Medina Que apoya: Eduardo Rafael Poblano Ojinaga Que apoya: Rafael García Martínez Que apoya: Diego Adiel Sandoval Chávez
Investigación	Guillermo Cuamea Cruz
Escritura - Preparación del borrador original	Guillermo Cuamea Cruz
Escritura - Revisión y edición	Principal: Guillermo Cuamea Cruz Que apoya: Manuel Arnoldo Rodríguez Medina Que apoya: Eduardo Rafael Poblano Ojinaga Que apoya: Rafael García Martínez Que apoya: Diego Adiel Sandoval Chávez
Adquisición de fondos	Guillermo Cuamea Cruz